ΣΑΠΗΛΟguide

Σήματα και Συστήματα

Σημείωση: Οι απαντήσεις μπορεί να μην είναι 100% σωστές.

—Nontas

Μερικά tips (για να μην ψάχνετε στο Google και στο βιβλίο)

• Προσοχή όταν ψάχνετε τυπολόγια Μ/Σ Fourier στο google, υπάρχουν διάφοροι ορισμοί.

Function	Fourier transform unitary, ordinary frequency	~~Fourier transform unitary, angular frequency~~	Fourier transform non-unitary, angular frequency
$f(x)$	$\hat{f}(\xi) \triangleq \hat{f}_1(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi\xi x}\, dx$	~~$\hat{f}(\omega) \triangleq \hat{f}_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx$~~	$\hat{f}(\omega) \triangleq \hat{f}_3(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx$

(από την wikipedia)

$(\xi = f)$

• Έχουμε 2 ορισμούς για το sinc: $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$, $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$

οι παρακάτω Μ/Σ Fourier ισχύουν για $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

• $\operatorname{sinc}(t) \xrightarrow{FT} \operatorname{rect}(f)$

δηλαδή $\operatorname{sinc}(at) \xrightarrow{FT} \frac{1}{|a|} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{a}\right)$

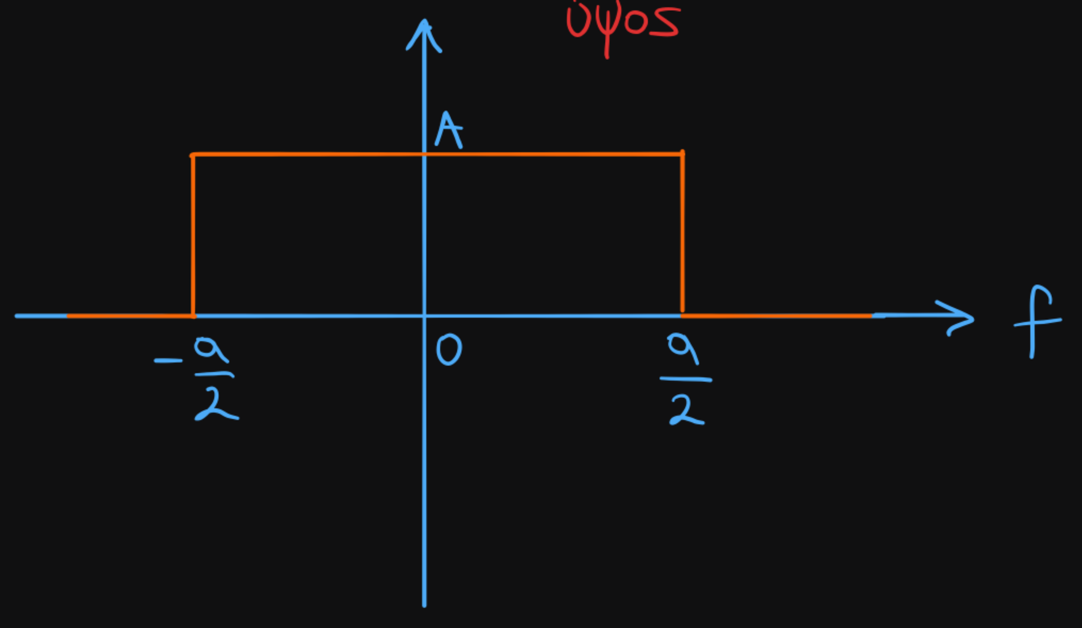
• $\operatorname{rect}(t) \xrightarrow{FT} \operatorname{sinc}(f)$

δηλαδή $\operatorname{rect}(at) \xrightarrow{FT} \frac{1}{|a|} \operatorname{sinc}\left(\frac{f}{a}\right)$

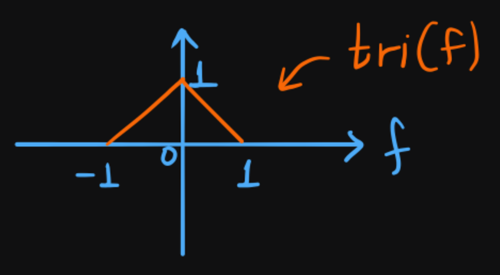
SOS

Σχήμα $A\operatorname{rect}\left(\frac{f}{a}\right)$ ← πλάτος

ύψος



• $\operatorname{sinc}^2(t) \xrightarrow{FT} \operatorname{tri}(f)$



• $\operatorname{tri}(t) \xrightarrow{FT} \operatorname{sinc}^2(f)$

• $e^{-ax^2} \xrightarrow{FT} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{(\pi f)^2}{a}}$

Gaussian συνάρτηση

• Για μετατροπή από ω σε f (και το αντίστροφο) απλά αντικαθιστούμε $\omega = 2\pi f$

• Ενέργεια: $E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_1(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X_1(\omega)|^2\, d\omega$ (= Joule)

• Ισχύς: $P = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2\, dt$ (= Watt)

• $y(t) = h(t) \cdot x(t) \xrightarrow{FT} Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} H(\omega) * X(\omega)$

Όμως προσοχή: $y(t) = h(t) \cdot x(t) \xrightarrow{FT} Y(f) = H(f) * X(f)$ (χάνεται το $\frac{1}{2\pi}$)

• Προσοχή όταν σπάμε ένα κλάσμα σε απλά κλάσματα, πρέπει βαθμός πολυωνύμου παρονομαστή > βαθμός πολυωνύμου αριθμητή

Ιουνίου 2023 (οι υπόλοιπες λύσεις υπάρχουν στο thmmy)

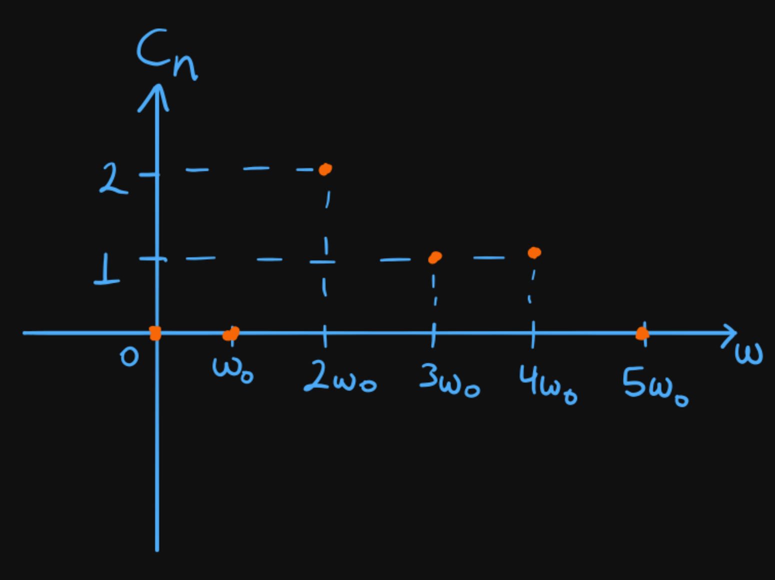
Θέμα 2 (4)
Έστω το περιοδικό σήμα $x(t)$ που δίνεται από

$$x(t) = 2\cos\left(2\pi 200t - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2\pi 300t + \frac{\pi}{7}\right) + \sin\left(2\pi 400t\right) \tag{3}$$

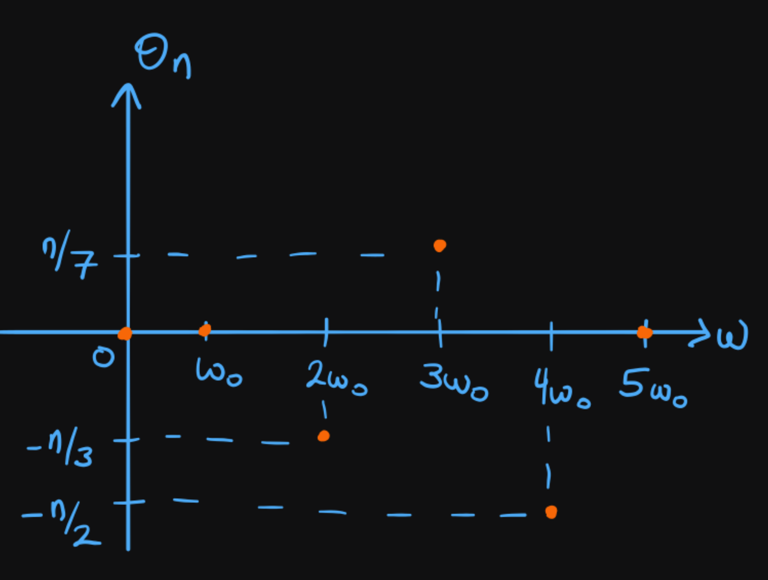
- Υπολογίστε και σχεδιάστε τα φάσματα πλάτους και φάσης των συντελεστών της σειράς Fourier που προκύπτει.
- Αν το παραπάνω σήμα διέλθει μέσα από ένα γραμμικό και χρονοαμετάβλητο σύστημα με κρουστική απόκριση ίση με
$$h(t) = \delta(t) - 800\text{sinc}\,(400t)\cos(2\pi 300t) \tag{4}$$
ποια θα είναι η έξοδος;
- Ποια θα είναι η μέγιστη συχνότητα δειγματοληψίας για την έξοδο του συστήματος με είσοδο το $x(t)$ και κρουστική απόκριση ίση με
$$h(t) = 200\text{sinc}(100t)\cos(2\pi 300t)\,, \tag{5}$$
προκειμένου να ανακτηθεί χωρίς παραμόρφωση;
- Αν το $x(t)$ καταγράφεται σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα (παράθυρο) και προκύπτει
$$z(t) = x(t)\left[u(t+1/2) - u(t-1/2)\right] \tag{6}$$
να βρεθεί η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας για το $z(t)$ προκειμένου να ανακτηθεί χωρίς παραμόρφωση.

α) • Το $x(t)$ γράφεται

$$x(t) = \underbrace{2}_{C_2}\cos\Big(\underbrace{2}_{n=2}\cdot\overbrace{200\pi t}^{\omega_0} - \underbrace{\tfrac{\pi}{3}}_{\theta_2}\Big) + \underbrace{1}_{C_3}\cos\Big(\underbrace{3}_{n=3}\cdot\overbrace{200\pi t}^{\omega_0} + \underbrace{\tfrac{\pi}{7}}_{\theta_3}\Big) + \underbrace{1}_{C_4}\cos\Big(\underbrace{4}_{n=4}\cdot\overbrace{200\pi t}^{\omega_0} - \underbrace{\tfrac{\pi}{2}}_{\theta_4}\Big)$$



Φάσμα πλάτους



Φάσμα φάσης

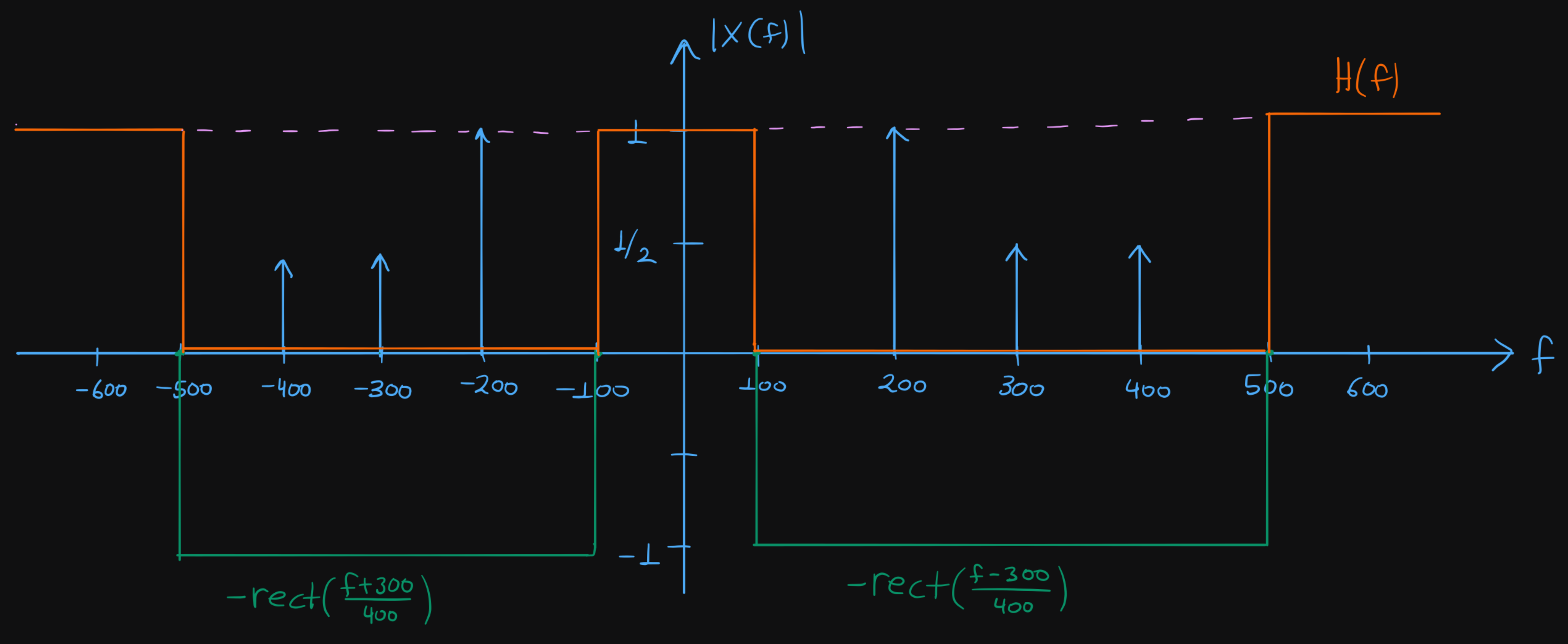
β) • $x(t) = 2\cos\left(400\pi t - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(600\pi t + \frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(800\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$

• Οπότε
$$X(f) = 2\pi\left[\delta(2\pi f - 400\pi) + \delta(2\pi f + 400\pi)\right]\cdot e^{-j2\pi f\cdot\frac{\pi}{3}} +$$
$$+\pi\left[\delta(2\pi f - 600\pi) + \delta(2\pi f + 600\pi)\right]\cdot e^{-j2\pi f\left(-\frac{\pi}{7}\right)} +$$
$$+\pi\left[\delta(2\pi f - 800\pi) + \delta(2\pi f + 800\pi)\right]\cdot e^{-j2\pi f\cdot\frac{\pi}{2}}$$

$$\left(\delta(at) = \frac{1}{|a|}\cdot\delta(t)\right)$$

$$\Leftrightarrow X(f) = \left[\delta(f-200) + \delta(f+200)\right]\cdot e^{-\frac{j2\pi^2 f}{3}} +$$
$$+\frac{1}{2}\left[\delta(f-300) + \delta(f+300)\right]\cdot e^{\frac{j2\pi^2 f}{7}} +$$
$$+\frac{1}{2}\left[\delta(f-400) + \delta(f+400)\right]\cdot e^{-j\pi^2 f}$$

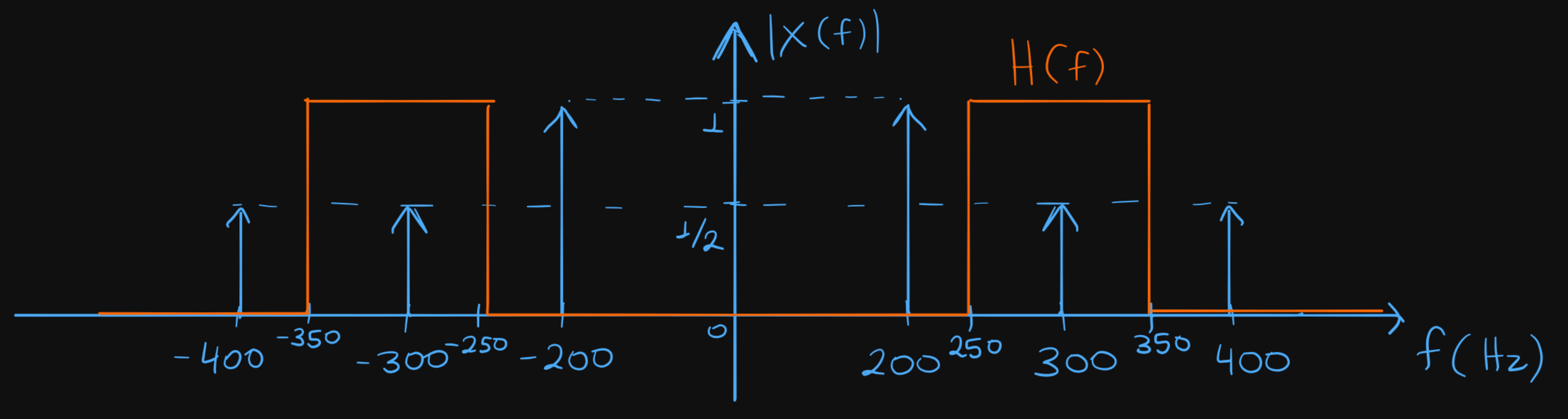
• Επίσης
$$H(f) = 1 - \frac{800}{400}\text{rect}\left(\frac{f}{400}\right) * \pi\left[\delta(2\pi f - 2\pi 300) + \delta(2\pi f + 2\pi 300)\right]$$
$$\Leftrightarrow H(f) = 1 - 2\text{rect}\left(\frac{f}{400}\right) * \frac{1}{2}\left[\delta(f-300) + \delta(f+300)\right]$$
$$\Leftrightarrow H(f) = 1 - \text{rect}\left(\frac{f-300}{400}\right) - \text{rect}\left(\frac{f+300}{400}\right)$$

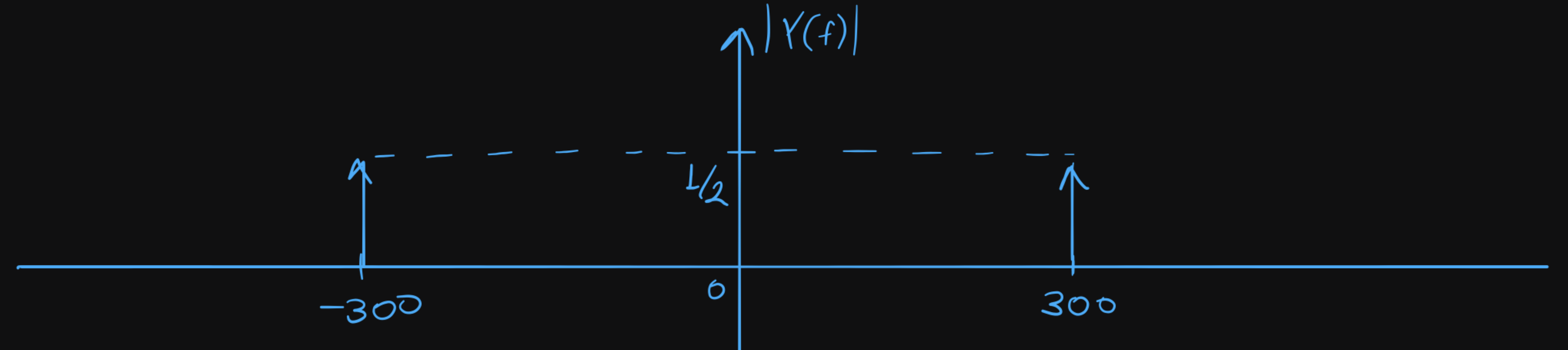


• Η έξοδος θα είναι $Y(f) = H(f)\cdot X(f)$, οπότε $\boxed{Y(f) = 0}$

γ) $H(f) = \frac{200}{100}\text{rect}\left(\frac{f}{100}\right) * \frac{1}{2}\left[\delta(f-300) + \delta(f+300)\right]$

$$\Leftrightarrow H(f) = \text{rect}\left(\frac{f \pm 300}{100}\right)$$



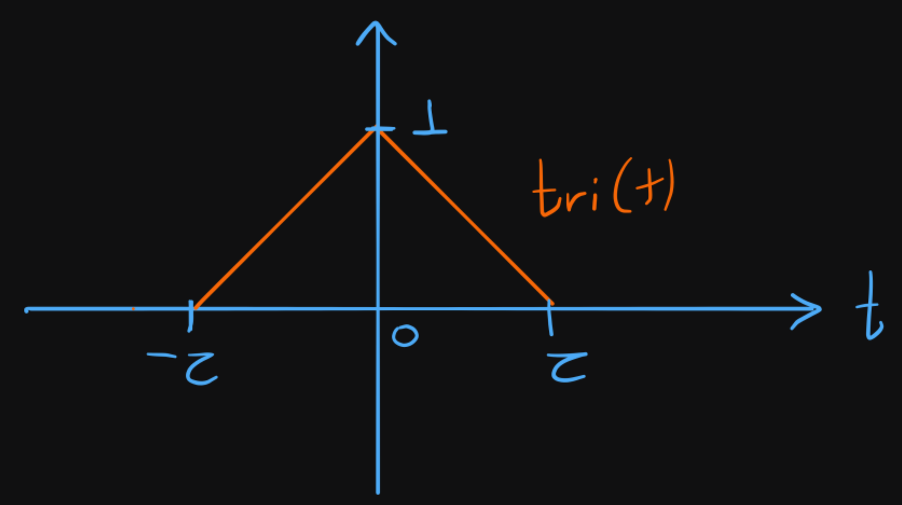


$f_{max} = 300\ Hz$, άρα $f_s = 300\cdot 2 \Leftrightarrow \boxed{f_s = 600\ Hz}$

δ) Το σήμα $z(t)$ είναι χρονοπερατό ($t_{min} = -\frac{1}{2}$ και $t_{max} = \frac{1}{2}$) $\rightarrow$ δεν γίνεται να είναι ζωνοπερατό

Άρα δεν μπορούμε να υπολογίσουμε ελάχιστη συχνότητα ($f_s \to \infty$ και $T_s \to 0$)

Λύσεις Ιουνίου 2022



Θέμα 1 (2)

Έστω το περιοδικό σήμα $x(t)$ που δίνεται από

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{tri}\left(\frac{t-kT_0}{2}\right) \tag{1}$$

όπου $\mathrm{tri}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau}(t+\tau), & -\tau \le t \le 0 \\ -\frac{1}{\tau}(t-\tau), & 0 \le t \le \tau \end{cases}$.

- Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $\mathrm{tri}(t)$ συναρτήσει της παραμέτρου τ.
- Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$ συναρτήσει των παραμέτρων τ και T_0.

• Το tri(t) γράφεται

$$y(t) = \frac{1}{\tau}(t+\tau)\left[u(t+\tau)-u(t)\right] - \frac{1}{\tau}(t-\tau)\left[u(t)-u(t-\tau)\right] =$$

κοινό παράγοντα $\frac{1}{\tau}$

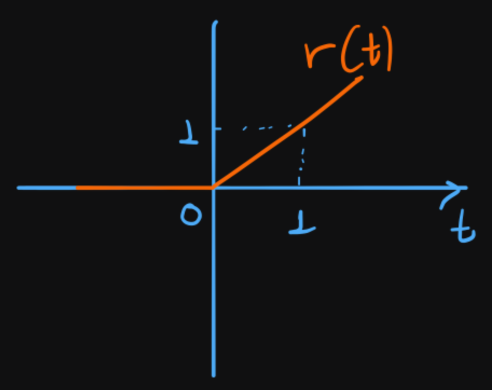
$$= \frac{1}{\tau}\left[(t+\tau)u(t+\tau) - (t+\tau)u(t) - (t-\tau)u(t) + (t-\tau)u(t-\tau)\right] =$$

κοινό παράγοντα $u(t)$

$$= \frac{1}{\tau}\left[(t+\tau)u(t+\tau) + u(t)(-t\cancel{-\tau}-t\cancel{+\tau}) + (t-\tau)u(t-\tau)\right]$$

$$= \frac{1}{\tau}\Big[\underbrace{(t+\tau)u(t+\tau)}_{r(t+\tau)} \underbrace{-2t\,u(t)}_{-2r(t)} + \underbrace{(t-\tau)u(t-\tau)}_{r(t-\tau)}\Big]$$

ramp function: $r(t) = t\,u(t)$



$$y(t) = \frac{1}{\tau}\left[r(t+\tau) - 2r(t) + r(t-\tau)\right]$$

• $$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{\tau}\left[u(t+\tau) - 2u(t) + u(t-\tau)\right] \qquad \frac{dr(t)}{dt} = u(t)$$

• $$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = \frac{1}{\tau}\left[\delta(t+\tau) - 2\delta(t) + \delta(t-\tau)\right] \qquad \frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$$

• Οπότε $$FT\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} = FT\left\{\frac{1}{\tau}\left[\delta(t+\tau) - 2\delta(t) + \delta(t-\tau)\right]\right\}$$

$$\Leftrightarrow (j\omega)^2 Y(\omega) = \frac{1}{\tau}\left[e^{j\omega\tau} - 2 + e^{-j\omega\tau}\right]$$

Ιδιότητες παραγώγισης και χρονικής ολίσθησης

$$\Leftrightarrow -\omega^2 Y(\omega) = \frac{2}{\tau}\left[\cos(\omega\tau) - 1\right] \qquad \cos(\omega\tau) = \frac{e^{j\omega\tau} + e^{-j\omega\tau}}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\omega^2 Y(\omega) = -\frac{4}{\tau}\cdot\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \qquad \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = \frac{1-\cos(\omega\tau)}{2}$$

$$\Leftrightarrow Y(\omega) = \frac{4}{\tau\omega^2}\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow Y(\omega) = \tau\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)^2} \qquad \mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Y(\omega) = \tau\cdot\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)} \quad \left(\text{ή } Y(f) = \tau\cdot\mathrm{sinc}^2(\pi f\tau)\right) \quad (\omega = 2\pi f)$$

• Έχουμε $$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{tri}\left(\frac{t-kT_0}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y\left(\frac{t-kT_0}{2}\right)$$

και ότι $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} y(t-kT_0) \xrightarrow{FT} \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(kf_0)\cdot\delta(f-kf_0)$$ (Μ/Σ Fourier περιοδικών σημάτων)

από $x(at) \xrightarrow{FT} \frac{1}{|a|}X\left(\frac{f}{a}\right)$

οπότε $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} y\left(\frac{t-kT_0}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y\left(\frac{t}{2} - k\frac{T_0}{2}\right) \underset{T_1 = \frac{T_0}{2}}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y\left(\frac{t}{2} - kT_1\right) \xrightarrow{FT} \frac{2}{T_1}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y(kf_1)\cdot\delta(2f - kf_1)$$

$$= \frac{2}{T_1}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y\left(k\frac{1}{T_1}\right)\cdot\delta\left(2f - k\frac{1}{T_1}\right) = \frac{4}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y(2kf_0)\cdot\delta\left(2f - 2k\frac{1}{T_0}\right) \quad \delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

$$= \frac{2\tau}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}^2(\pi 2kf_0\tau)\cdot\delta\left(f - k\frac{1}{T_0}\right) = \boxed{\frac{2\tau}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}^2\left(2\pi k\tau\frac{1}{T_0}\right)\cdot\delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) = X(f)}$$

Θέμα 2 (3)
Θεωρείστε το σύστημα που προκύπτει από το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων

$$x(t) - \frac{dy(t)}{dt} = w(t) \qquad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{t} w(\tau)d\tau - 3y(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} \qquad (3)$$

όπου $x(t)$ είναι το σήμα εισόδου και $y(t)$ το σήμα εξόδου.

- Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες.
- Να βρεθεί η κρουστική απόκριση του συστήματος.
- Να βρεθεί η βηματική απόκριση του συστήματος.

α) • Μ/Σ Laplace εξίσωσης (2):

$$X(s) - sY(s) = W(s) \qquad (4)$$

• Μ/Σ Laplace εξίσωσης (3):

$$\frac{W(s)}{s} - 3Y(s) = s^2 Y(s) \overset{(4)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\frac{X(s)}{s} - Y(s) - 3Y(s) = s^2Y(s) \Leftrightarrow \frac{X(s)}{s} = Y(s)(4+s^2) \Leftrightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s(s^2+4)} \Leftrightarrow \boxed{H(s) = \frac{1}{s(s^2+4)}}$$

β) $H(s) = \dfrac{1}{s(s^2+4)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{Bs+C}{s^2+4}$

Έχουμε $A(s^2+4) + s(Bs+C) = 1 \Leftrightarrow (A+B)s^2 + Cs + 4A = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ 4A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}+B=0 \\ C=0 \\ A=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-\frac{1}{4} \\ C=0 \\ A=\frac{1}{4} \end{cases}$$

δηλαδή $H(s) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\,\frac{s}{s^2+4}$

Πόλοι: $s=0$ και $s^2=-4 \Leftrightarrow s=\pm\sqrt{-4} \Leftrightarrow s=\pm 2i$

• Υπάρχουν 2 πιθανές περιοχές σύγκλισης
- $Re(s)>0$ (αιτιατό και ασταθές)
- $Re(s)<0$ (αντιαιτιατό και ασταθές) (δεν ασχολούμαστε με αυτό)

• Για $Re(s)>0$: $\boxed{h(t) = \frac{1}{4}u(t) - \frac{1}{4}\cos(2t)\,u(t)}$

γ) • Μεθοδολογία: Βάζουμε $X(s) = \frac{1}{s}$ (αφού $x(t) = u(t)$)

οπότε $H(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)} = \dfrac{1}{s(s^2+4)} \Leftrightarrow Y(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+4)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s^2} + \dfrac{Cs+D}{s^2+4}$

έχουμε $A(s^2+4)s + B(s^2+4) + (Cs+D)s^2 = 1 \Leftrightarrow (C+A)s^3 + (B+D)s^2 + 4As + 4B = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C+A=0 \\ B+D=0 \\ 4A=0 \\ 4B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=0 \\ D=-\frac{1}{4} \\ A=0 \\ B=\frac{1}{4} \end{cases}$$

οπότε $Y(s) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s^2+4}$

Πόλοι: $s=0$
$s=\pm 2i$

• Σύστημα αιτιατό : $Re(s)>0$ $\boxed{y(t) = \frac{1}{4}t\,u(t) - \frac{1}{8}\sin(2t)\,u(t)}$

Θέμα 3 (2)
Να βρεθεί η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας για το σήμα

$$x(t) = \frac{1}{t}\,\mathrm{sinc}^2(2t-1)\cdot\sin(\pi t) \qquad (4)$$

προκειμένου να μπορεί να ανακτηθεί πλήρως από τα δείγματά του και να ικανοποιείται η συνθήκη του Nyquist.

Α' τρόπος (όχι για τις εξετάσεις)

• Έχουμε $\mathrm{sinc}(t) \xleftrightarrow{FT} \mathrm{rect}(f)$

και $\mathrm{sinc}(2t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2}\right)$

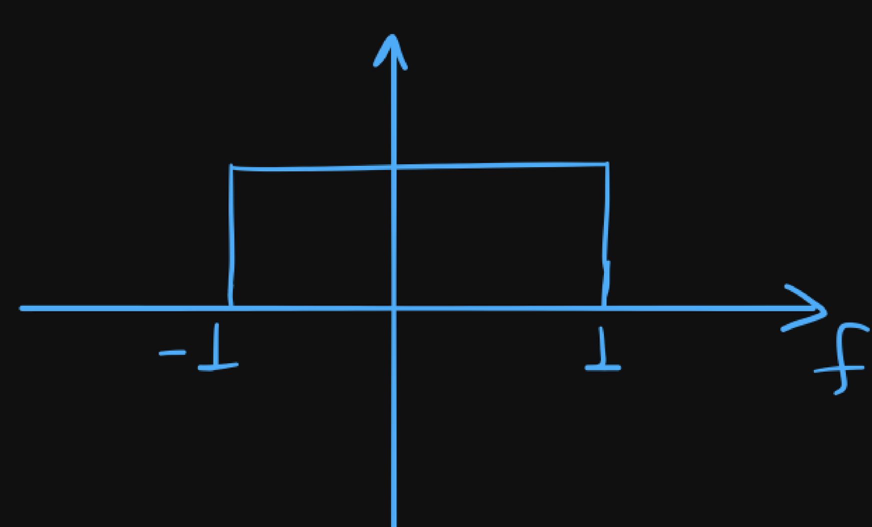
και $\mathrm{sinc}(2t-1) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{2}e^{-j2\pi f}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2}\right)$

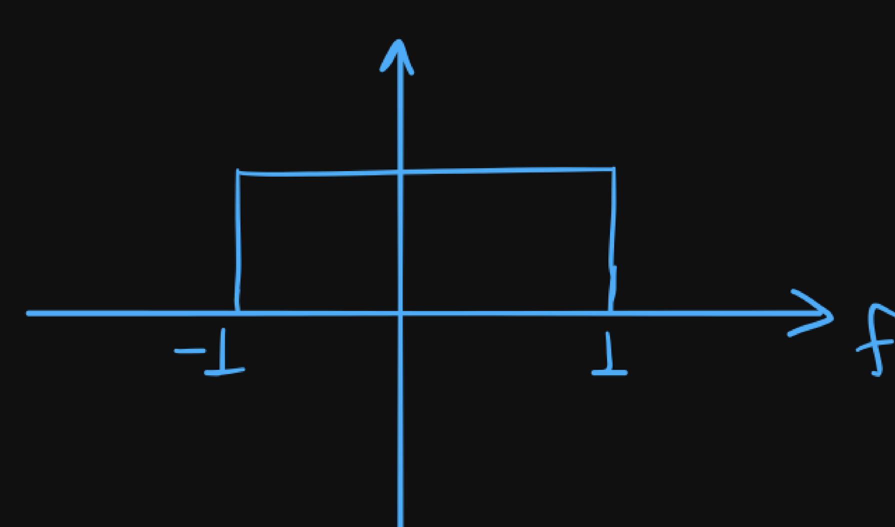
ιδιότητα: $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

• και $\sin(\pi t) \xleftrightarrow{FT} -j\pi\Big[\overbrace{\delta(2\pi f-\pi)}^{\delta[2\pi(f-\frac{1}{2})]} - \overbrace{\delta(2\pi f+\pi)}^{\delta[2\pi(f+\frac{1}{2})]}\Big] = -\frac{j\pi}{2\pi}\left[\delta\left(f-\frac{1}{2}\right)-\delta\left(f+\frac{1}{2}\right)\right] = -\frac{j}{2}\left[\delta\left(f-\frac{1}{2}\right)-\delta\left(f+\frac{1}{2}\right)\right]$

• Γινόμενο στο πεδίο του χρόνου $\longleftrightarrow$ συνέλιξη στο πεδίο της συχνότητας.

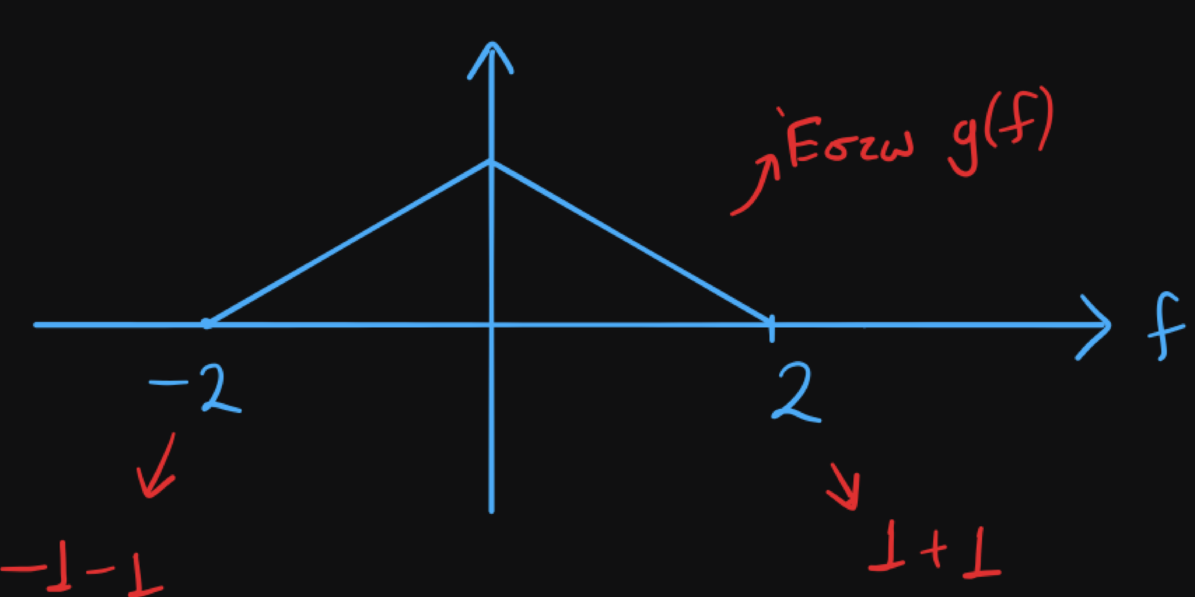
(Σημείωση: δεν μας ενδιαφέρει το ύψος στον κατακόρυφο άξονα για να βρούμε τη συχνότητα Nyquist)



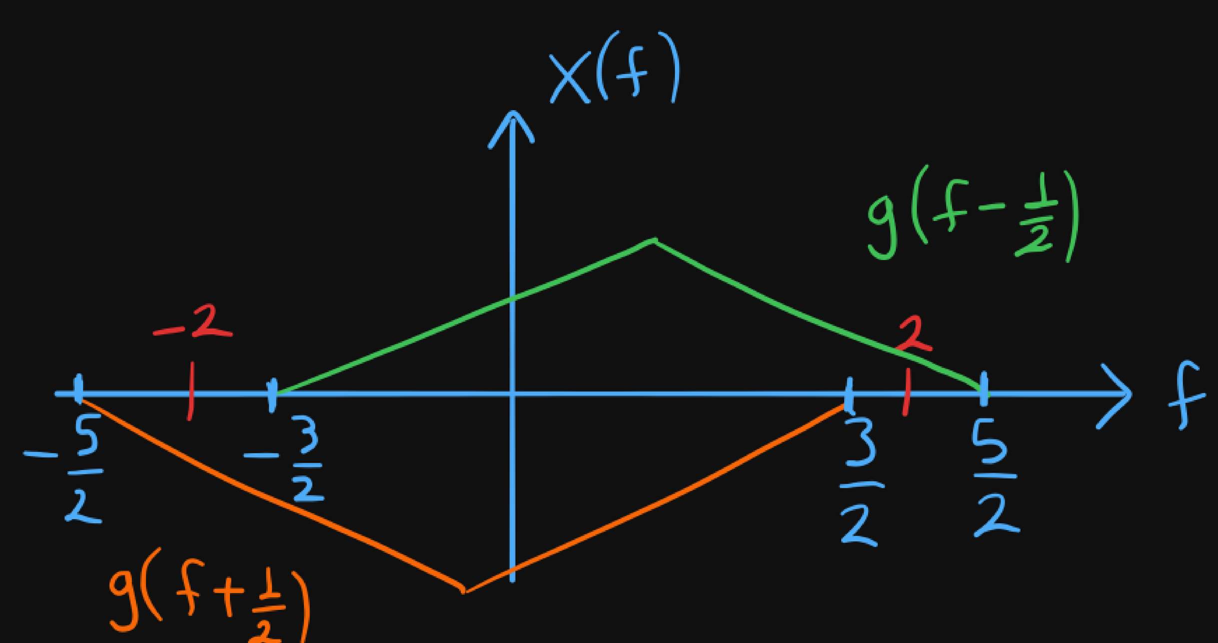
$*$


$* \left[\delta\left(f-\frac{1}{2}\right)-\delta\left(f+\frac{1}{2}\right)\right] =$

(shifting property: $x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$)

$=$


$* \left[\delta\left(f-\frac{1}{2}\right)-\delta\left(f+\frac{1}{2}\right)\right] =$



Μέγιστη συχνότητα: $f_m = \frac{5}{2}Hz$

Συχνότητα Nyquist:

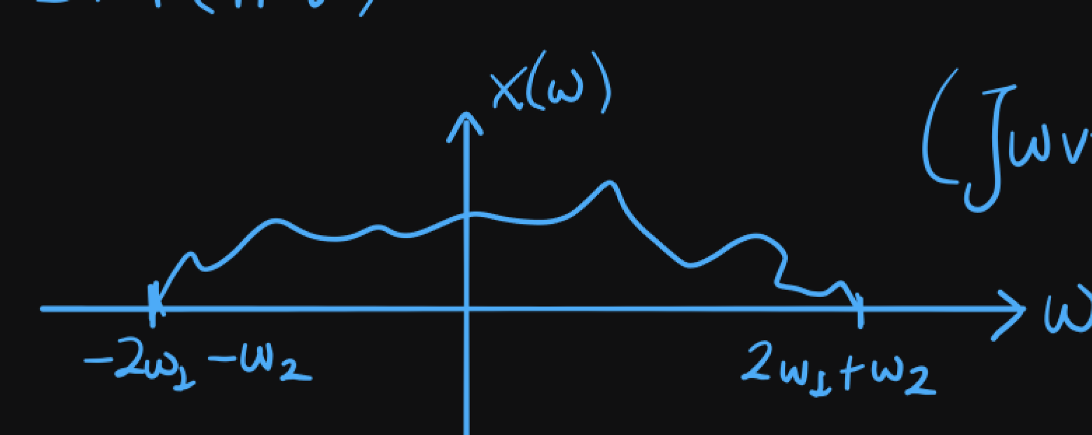
$f_s = 2f_m$

$f_s = 5\,Hz$

Β' τρόπος (για τις εξετάσεις)

• Έχουμε $x(t) = \frac{1}{t}\,\mathrm{sinc}^2(2t-1)\sin(\pi t) = \frac{1}{t}\left(\frac{\sin[\pi(2t-1)]}{\pi(2t-1)}\right)^2\cdot\sin(\pi t)$

$\Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{t}\cdot\frac{\sin^2(\overbrace{2\pi}^{\omega_1} t-\pi)}{(2\pi t-\pi)^2}\cdot\sin(\overbrace{\pi}^{\omega_2} t)$



(Ζωνοπερατό)

• Το πλάτος στον ω άξονα (στο πεδίο της συχνότητας) θα είναι από $-2\omega_1-\omega_2$ μέχρι $2\omega_1+\omega_2$ (λόγω συνέλιξης)

δηλαδή $\omega_m = 2\omega_1+\omega_2 = 2\cdot 2\pi+\pi = 5\pi$

και $f_m = \frac{\omega_m}{2\pi} = \frac{5\pi}{2\pi} \Leftrightarrow f_m = \frac{5}{2}$ $\longrightarrow$ Άρα $\underbrace{f_s}_{\text{Nyquist rate}} = 2\cdot f_m = 2\cdot\frac{5}{2} \Leftrightarrow \boxed{f_s = 5\,Hz}$

Θέμα 4 (3)
Η συνάρτηση συστήματος ενός διακριτού αιτιατού συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$H(z) = \frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{1+z^{-1}-2z^{-2}} \tag{5}$$

Να βρεθεί η κρουστική απόκριση του συστήματος.

• $H(z) = \frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{1+z^{-1}-2z^{-2}} \quad \frac{\cdot z^2}{\cdot z^2} \quad \frac{z(1+z^{-1})}{z^2+z-2}$

$\Leftrightarrow H(z) = \frac{z+1}{z^2+z-2} = \frac{z+1}{(z-1)(z+2)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow H(z) = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+2}$

• Έχουμε $A = \lim_{z\to 1}(z-1)H(z) = \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3}$ και $B = \lim_{z\to -2}(z+2)H(z) = \frac{-2+1}{-2-1} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$

οπότε $H(z) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{z-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z+2} = \frac{2}{3}z^{-1}\cdot\frac{z}{z-1} + \frac{1}{3}z^{-1}\cdot\frac{z}{z+2}$

• Σήμα αιτιατό: περιοχή σύγκλισης $|z|>2$

• $\frac{z}{z-1} = Z\{u(n)\} \xrightarrow[\text{ολίσθηση}]{\text{Χρονική}} z^{-1}\frac{z}{z-1} = Z\{u(n-1)\}$

• $\frac{z}{z+2} = Z\{(-2)^n u(n)\} \xrightarrow[\text{ολίσθηση}]{\text{Χρον.}} z^{-1}\frac{z}{z-1} = Z\{(-2)^{n-1}u(n-1)\}$

Άρα $\boxed{h(n) = \frac{2}{3}u(n-1) + \frac{1}{3}(-2)^{n-1}u(n-1)}$

Λύσεις Φεβρουαρίου 2022

Θέμα 1 (2)
Αν ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$ δίνεται από τη σχέση

$$X(\omega) = -\frac{d^3}{d\omega^3}\left[\left(\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right)(1-e^{j\omega})\right],$$

να βρεθεί η ενέργεια του σήματος.

• Ισχύει $(-jt)^3 a(t) \xrightarrow{FT} \dfrac{d^3 A(\omega)}{d\omega^3}$

όπου $A(\omega) = \left(\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{j\omega}\right)\left(1-e^{j\omega}\right)$

• Επίσης $u(t) \xrightarrow{FT} \pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{j\omega} = A_1(\omega)$

και $\delta(t)-\delta(t+1) \xrightarrow{FT} 1-e^{j\omega} = A_2(\omega)$

δηλαδή $A(\omega) = A_1(\omega)\cdot A_2(\omega)$

• Άρα τελικά: $x(t) = -(-jt)^3\cdot\left(a_1(t) * a_2(t)\right) \xrightarrow{FT} -\dfrac{d^3\left(A_1(\omega)\cdot A_2(\omega)\right)}{d\omega^3}$

δηλαδή $x(t) = -jt^3\left[u(t) * \left(\delta(t)-\delta(t+1)\right)\right] = -jt^3\left(u(t)-u(t+1)\right) = jt^3\left(u(t+1)-u(t)\right)$

• Έχουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| j^2 t^6 \left(u(t+1)-u(t)\right)^2 \right| dt \iff (1)$

για β' τρόπο

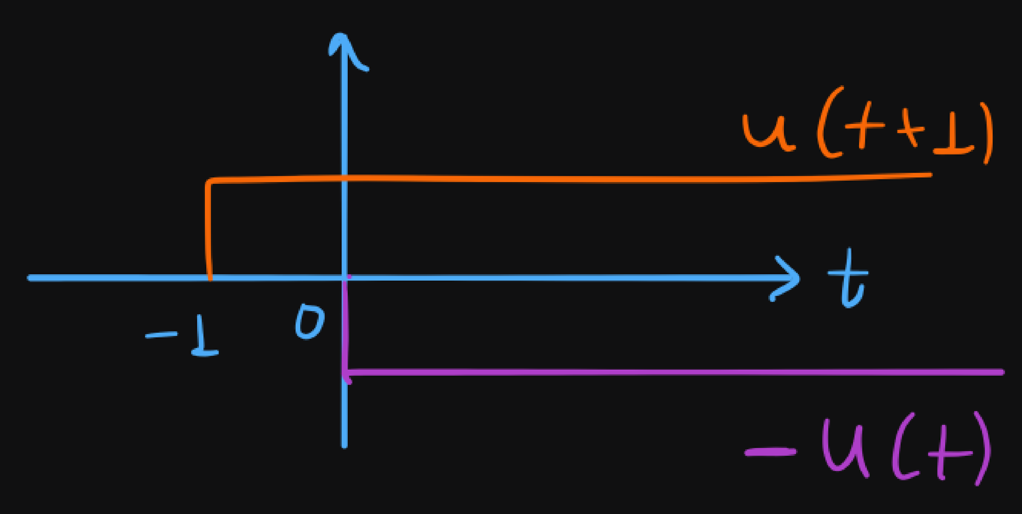
$$\iff E = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[t^6\left(u(t+1)-u(t)\right)^2\right]dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^6 u^2(t+1)\,dt - 2\int_{-\infty}^{+\infty} t^6 u(t+1)\cdot u(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} t^6 u^2(t)\,dt$$

$$= \int_{-1}^{+\infty} t^6 dt - 2\int_{0}^{+\infty} t^6 dt + \int_{0}^{+\infty} t^6 dt = \int_{-1}^{+\infty} t^6 dt - \int_{0}^{+\infty} t^6 dt = \lim_{k\to+\infty}\left(\int_{-1}^{k} t^6 dt - \int_{0}^{k} t^6 dt\right) =$$

$$= \lim_{k\to+\infty}\left(\left[\frac{t^7}{7}\right]_{-1}^{k} - \left[\frac{t^7}{7}\right]_{0}^{k}\right) = \lim_{k\to+\infty}\left(\frac{k^7}{7}+\frac{1}{7}-\frac{k^7}{7}\right) = \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{7} \iff \boxed{E = \frac{1}{7}\ J}$$

Β' τρόπος

• Από το (1) έχουμε $u(t+1)-u(t) \longrightarrow$ αλλάζουμε όρια ολοκλήρωσης σε $\int_{-1}^{0}$



Οπότε $(1) \iff \int_{-1}^{0} t^6 dt = \left[\frac{t^7}{7}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{7}\ J$

Θέμα 2 (3)
Αν $x(t) = e^{-t}(u(t-1)-u(t-4))$ και $y(t) = e^{-t}u(t+2)$, να υπολογιστεί η συνέλιξη $z(t) = x(t) * y(t)$

• Βήμα 1: αλλάζουμε τις μεταβλητές από t σε τ:

$$x(\tau) = e^{-\tau}(u(\tau-1)-u(\tau-4)) \quad \text{και} \quad y(\tau) = e^{-\tau}u(\tau+2)$$

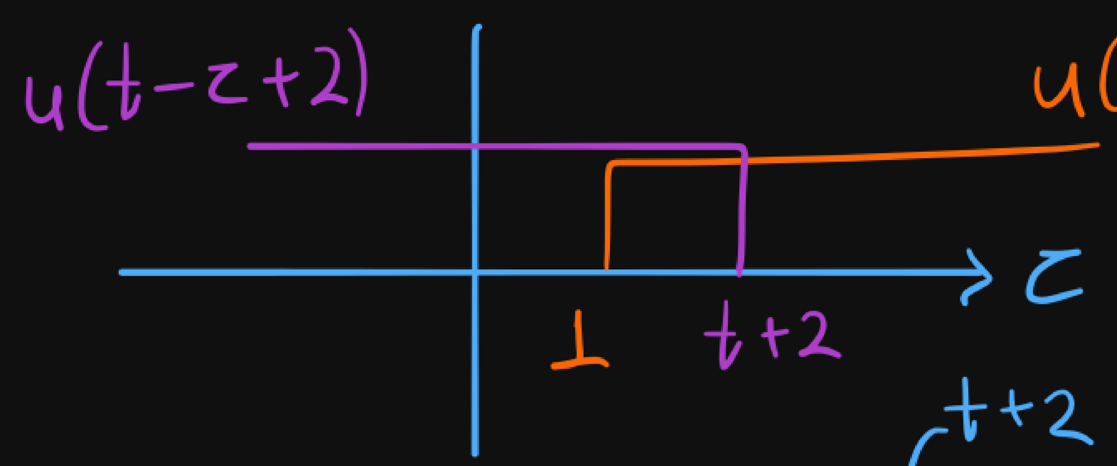
• Βήμα 2: Υπολογίζουμε το $y(t-\tau) = e^{-(t-\tau)}u(t-\tau+2)$

• Βήμα 3: Υπολογίζουμε το

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot y(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau}[u(\tau-1)-u(\tau-4)]\cdot e^{\tau-t}u(t-\tau+2)\,d\tau$$

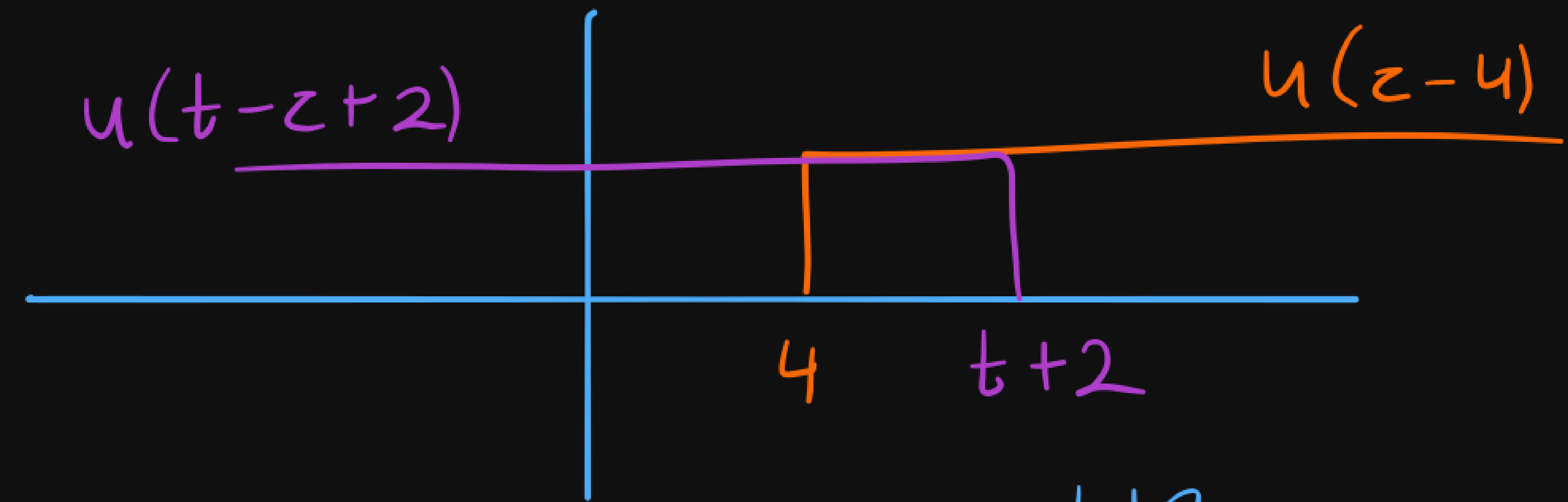
άγνωστος το τ, όχι το t

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau}e^{\tau-t}u(\tau-1)u(t-\tau+2)\,d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau}e^{\tau-t}u(\tau-4)u(t-\tau+2)\,d\tau$$



• Όρια ολοκλήρωσης: $\int_{1}^{t+2}$

• step func: $u(\underbrace{t+2}-\underbrace{1})$ (αφαιρείς τα όρια ολοκλήρωσης)



• Όρια ολοκλήρωσης: $\int_{4}^{t+2}$

• step func: $u(\underbrace{t+2}-\underbrace{4})$

(Προφανώς δεν χρειάζεται να τα γράφουμε όλα αυτά)

Δηλαδή

$$z(t) = \int_{1}^{t+2} e^{-\tau}e^{\tau-t}u(t+1)\,d\tau - \int_{4}^{t+2} e^{-\tau}e^{\tau-t}u(t-2)\,d\tau =$$

$$= \int_{1}^{t+2} e^{-t}u(t+1)\,d\tau - \int_{4}^{t+2} e^{-t}u(t-2)\,d\tau = e^{-t}u(t+1)\cdot[\tau]_{1}^{t+2} - e^{-t}u(t-2)\,[\tau]_{4}^{t+2}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{z(t) = e^{-t}u(t+1)\cdot(t+1) - e^{-t}u(t-2)\cdot(t-2)}$$

$$\bullet\ H(z) = \frac{Az^{-1}}{1-2z^{-1}+Bz^{-2}} = \frac{Az}{z^2-2z+B}$$

Θέμα 4 (3)
Έστω

$$H(z) = \frac{Az^{-1}}{1-2z^{-1}+Bz^{-2}} \qquad (A, B \in \mathbf{R}^*)$$

η συνάρτηση συστήματος ενός διακριτού, γραμμικού, αμετάβλητου κατά τη μετατόπιση και αιτιατο
ματος. Να βρεθούν οι επιτρεπτές τιμές των σταθερών παραμέτρων A και B, ώστε το σύστημα
ευσταθές. Αν $A = B = 1$, να βρεθεί η χρουστική απόκριση του συστήματος.

$$\Delta = 4-4B = 4(1-B)$$

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1-B}}{2} = 1 \pm \sqrt{1-B}$$

• Έχουμε 2 περιπτώσεις: $\rightarrow$ $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 1-B \geq 0 \Leftrightarrow B \leq 1 \rightarrow$ Πόλοι: $z_1 = 1+\sqrt{1-B}$, $z_2 = 1-\sqrt{1-B}$ με $|z_1| > |z_2|$

$\searrow$ $\Delta < 0 \Leftrightarrow 1-B < 0 \Leftrightarrow B > 1 \rightarrow$ Πόλοι $z_1 = 1+j\sqrt{B-1}$, $z_2 = 1-j\sqrt{B-1}$ με $|z_1| = |z_2|$

(αφού $1 \pm \sqrt{1-B} = 1 \pm \sqrt{-\underbrace{(B-1)}_{>0}} = 1 \pm j\sqrt{B-1}$)

Για $\Delta \geq 0$

• Σύστημα ευσταθές: $|z_1| < 1 \Leftrightarrow 1+\sqrt{1-B} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{1-B} < 0$ (αδύνατο) $\longrightarrow$ Δεν γίνεται το σύστημα να είναι και αιτιατό και ευσταθές αν $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow B \leq 1$
(και αιτιατό)

Για $\Delta < 0$

• Σύστημα ευσταθές: $|z_{1,2}| < 1 \Leftrightarrow \sqrt{1^2 + \sqrt{B-1}^{\,2}} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{1+B-1} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{B} < 1 \Leftrightarrow B < 1$ (όμως $\Delta < 0 \Downarrow B > 1$)
(και αιτιατό)

Για καμία τιμή των A, B το σύστημα είναι ευσταθές.

• Για $A = B = 1$: $\dfrac{H(z)}{z} = \dfrac{1}{(z-1)(z-1)} = \dfrac{1}{(z-1)^2} \Leftrightarrow H(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2}$ (αιτιατό, $|z| > 1$)

Άρα $\boxed{h(n) = n \cdot u(n)}$

Λύσεις Ιουνίου 2021

Θέμα 1
Μία διαδικασία περιγράφεται από το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{d^2w(t)}{dt^2} + 2.5\frac{dw(t)}{dt} + w(t) = x(t)$$
$$\frac{d[y(t)-w(t)]}{dt} = 2x(t)$$

όπου $t \geq 0$. Αν $x(t)$ και $y(t)$ είναι αντίστοιχα η είσοδος και η έξοδος της διαδικασίας, να βρεθεί η κρουστική απόκριση της διαδικασίας.

• Μ/Σ Laplace 1ης εξίσωσης (αρχικές συνθήκες=0)

$$s^2W(s) + 2{,}5\,s\,W(s) + W(s) = X(s)$$

$$\Leftrightarrow W(s) = \frac{X(s)}{s^2+2{,}5s+1} \quad (3)$$

• Μ/Σ Laplace 2ης εξίσωσης (το $\frac{d(y(t)-w(t))}{dt}$ γράφεται $\frac{dy(t)}{dt} - \frac{dw(t)}{dt}$)

$$sY(s) - sW(s) = 2X(s) \overset{(3)}{\Longleftrightarrow} sY(s) - \frac{sX(s)}{s^2+2{,}5s+1} = 2X(s) \Leftrightarrow sY(s) = X(s)\cdot\left(2+\frac{s}{s^2+2{,}5s+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2+\frac{s}{s^2+2{,}5s+1}}{s} = \frac{2s^2+6s+2}{s\underbrace{(s^2+2{,}5s+1)}} = H(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+0{,}5} + \frac{C}{s+2}$$

$\Delta = 2{,}5^2 - 4 = 2{,}25$

$s_{1,2} = \frac{-2{,}5 \pm 1{,}5}{2} = \begin{cases} -0{,}5 \\ -2 \end{cases}$

• $A = \lim_{s\to 0}\left[sH(s)\right] = \frac{2}{(0+0{,}5)(0+2)} = 2$

• $B = \lim_{s\to -0{,}5}\left[(s+0{,}5)H(s)\right] = \frac{2\cdot 0{,}5^2 - 6\cdot 0{,}5 + 2}{-0{,}5\cdot(-0{,}5+2)} = \frac{2}{3}$

• $C = \lim_{s\to -2}\left[(s+2)H(s)\right] = \frac{2\cdot 4 - 6\cdot 2 + 2}{-2(-2+0{,}5)} = -\frac{2}{3}$

Οπότε $H(s) = 2\cdot\frac{1}{s} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s+0{,}5} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s+2}$

Πόλοι: $s=0$, $s=-0{,}5$, $s=-2$

• Μας δίνεται $t \geq 0$, δηλαδή το σύστημα είναι αιτιατό και άρα περιοχή σύγκλισης $Re(s) > 0$

Άρα $\boxed{h(t) = \left[2 + \frac{2}{3}e^{-0{,}5t} - \frac{2}{3}e^{-2t}\right]u(t)}$

Θέμα 2

Ένα πραγματικό, ευσταθές και αιτιατό σύστημα συνεχούς χρόνου περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t), \quad t \geq 0,$$

όπου $x(t)$ και $y(t)$ είναι τα σήματα εισόδου και εξόδου, αντίστοιχα. Αν $x(t) = e^{-t}u(t)$ και οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, να βρεθεί η έξοδος, $y(t)$, του συστήματος. Έστω ότι η διαφορική εξίσωση προσεγγίζεται από εξίσωση διαφορών, οπότε προκύπτει το σύστημα διακριτού χρόνου

$$\frac{y[n+1] - y[n]}{\Delta t} + ay[n] = x[n], \quad n \geq 0,$$

Να εξεταστεί η ευστάθεια του διακριτού συστήματος.

- Μ/Σ Laplace στην 1η εξίσωση:

$$sY(s) + aY(s) = X(s) \quad (1)$$

- $x(t) = e^{-t}u(t) \xrightarrow[\text{Laplace}]{\text{Μ/Σ}} \dfrac{1}{s+1}$

Άρα $(1) \xLeftrightarrow{X(s)=\frac{1}{s+1}} Y(s)(s+a) = \dfrac{1}{s+1}$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+a)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+a}$$

- $A = \lim\limits_{s\to -1}\left[(s+1)Y(s)\right] = \dfrac{1}{a-1}$ • $B = \lim\limits_{s\to -a}\left[(s+a)Y(s)\right] = \dfrac{1}{1-a}$

Οπότε $Y(s) = \dfrac{1}{a-1}\dfrac{1}{s+1} + \dfrac{1}{1-a}\cdot\dfrac{1}{s+a}$

Πόλοι $s=-1$

$s=-a$

Άρα $\boxed{y(t) = \left[\dfrac{1}{a-1}e^{-t} + \dfrac{1}{1-a}e^{-at}\right]u(t)}$

- Από την (1) έχουμε $H(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)} = \dfrac{1}{s+a}$ και επειδή το σύστημα είναι αιτιατό και ευσταθές, τότε $\underline{a>0}$ (θα έχουμε πόλο στο $-a<0$)

πρέπει να περιλαμβάνεται στην ΠΣ ο κάθετος άξονας

- $\dfrac{y[n+1]}{\Delta t} - \dfrac{y[n]}{\Delta t} + ay[n] = x[n] \xrightarrow{\text{Μ/Σ Z}} \dfrac{1}{\Delta t}Y(z)\cdot z^1 - \dfrac{1}{\Delta t}Y(z) + aY(z) = X(z)$

$$Y(z)\left(\frac{z-1}{\Delta t} + a\right) = X(z) \Leftrightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{\frac{z-1}{\Delta t}+a} = \frac{\Delta t}{z-1+a\Delta t} = H(z) = \frac{\Delta t}{z-(1-a\Delta t)}$$

Πόλος: $z_1 = 1 - a\Delta t$ • Για να είναι το σύστημα ευσταθές πρέπει $|z_1| < 1 \Leftrightarrow -1 < z_1 < 1$

$$\Leftrightarrow -1 < 1 - a\Delta t < 1 \Leftrightarrow -2 < -a\Delta t < 0 \xLeftrightarrow{-a<0} \frac{2}{a} > \Delta t > 0 \Leftrightarrow \boxed{\Delta t \in \left(0, \frac{2}{a}\right)}$$

Θέμα 3

Αν

$$H(z) = \frac{z^2(2z-2)}{(z-1)(z+0.5)}$$

είναι η συνάρτηση ενός συστήματος, να βρεθεί η κρουστική απόκριση (για κάθε πιθανή περιοχή σύγκλισης της $H(z)$) και να χαρακτηριστεί το σύστημα ως προς την ευστάθειά του.

- $H(z) = \dfrac{z^2(2z-2)}{(z-1)(z+0{,}5)} = \dfrac{2z^2\cancel{(z-1)}}{\cancel{(z-1)}(z+0{,}5)}$

(μπορούμε κανονικά να το απλοποιήσουμε, με απλά κλάσματα θα βγει $\dfrac{A}{z-1} \rightarrow A=0$)

$\Leftrightarrow H(z) = \dfrac{2z^2}{z+0{,}5}$ Πόλος: $z=-0{,}5$

λόγω χρονικής ολίσθησης

- Για $|z|>0{,}5$: $\boxed{h(n) = 2(-0{,}5)^{n+1}u(n+1)}$

Η Περιοχή σύγκλισης περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο, άρα σύστημα <u>ευσταθές</u>

- Για $|z|<0{,}5$: $h(n) = -2\cdot(-0{,}5)^{n+1}\cdot u(-(n+1)-1) \Leftrightarrow \boxed{h(n) = -2(-0{,}5)^{n+1}u(-n-2)}$

Εφόσον <u>δεν</u> περιλαμβάνεται ο μοναδιαίος κύκλος, το σύστημα είναι <u>ασταθές</u>.

Θέμα 4

Έστω το σήμα $x(t) = \cos(\frac{\pi}{4}t) + 2\sin(\frac{\pi}{2}t) + 3$.

1. Βρείτε και σχεδιάστε τον μετασχηματισμό Fourier του σήματος.

2. Αν το σήμα υφίσταται ιδανική δειγματοληψία με περίοδο δειγματοληψίας $T_s = 4s$, ποιο είναι το φάσμα του σήματος μετά τη δειγματοληψία; Μπορεί το δειγματοληπτημένο σήμα να ανακτηθεί χωρίς παραμόρφωση;

3. Αν το $x(t)$ καταγράφεται μόνο σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα και προκύπτει το σήμα

$$y(t) = x(t)[u(t+1/2) - u(t-1/2)] \qquad (1)$$

όπου $u(\cdot)$ η βηματική συνάρτηση, ποια είναι η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας του $y(t)$, έτσι ώστε το $y(t)$ να μπορεί να ανακτηθεί πλήρως από τα δείγματά του και να ικανοποιείται η συνθήκη του Nyquist;

στο βιβλίο έχει μείον, είναι λάθος

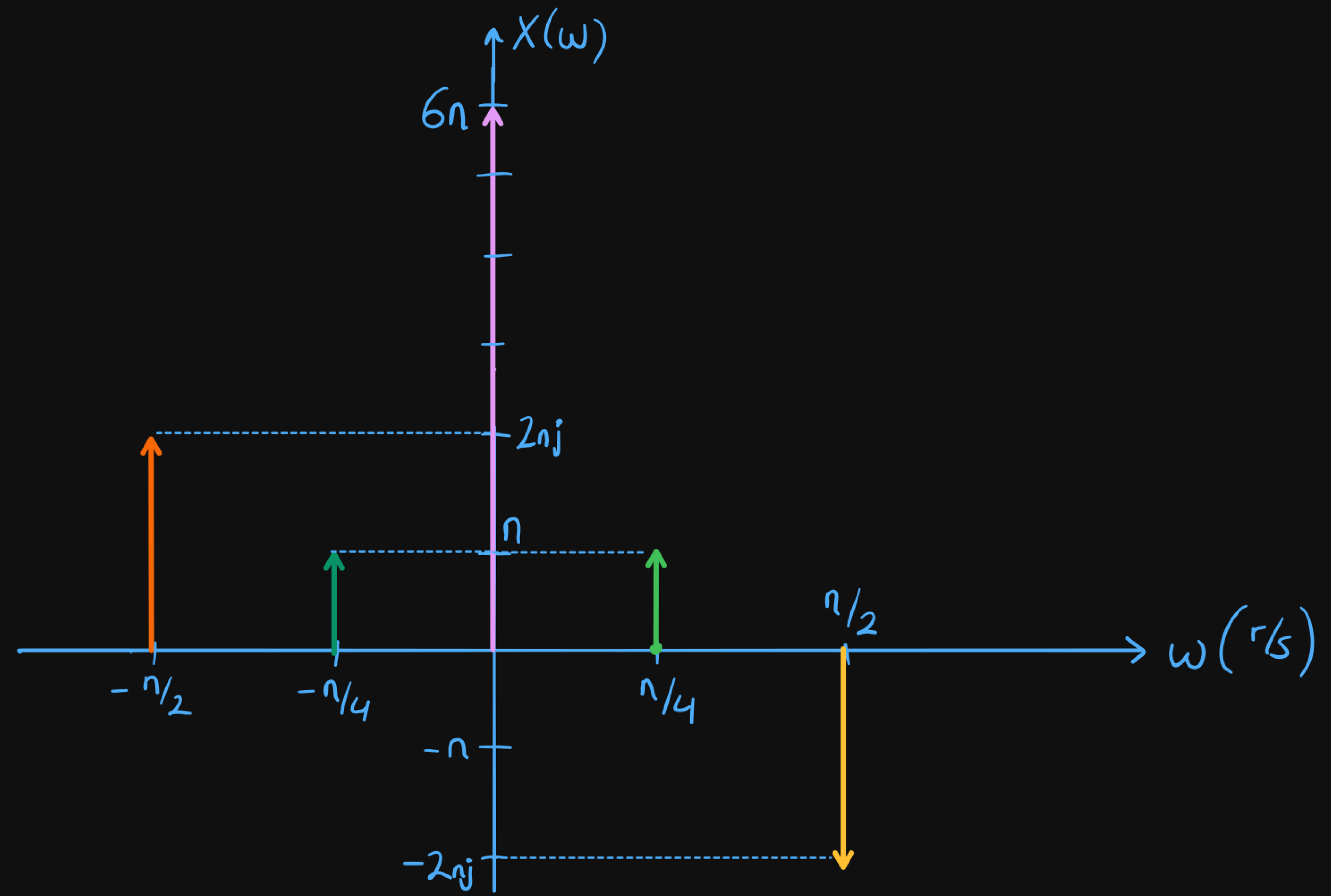
1). $\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \xrightarrow{FT} \pi\left[\delta\left(\omega-\frac{\pi}{4}\right)+\delta\left(\omega+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

• $2\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \xrightarrow{FT} -2\pi j\left[\delta\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)-\delta\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)\right]$

• $3 \xrightarrow{FT} 6\pi\delta(\omega)$

Άρα $F\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)+2\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)+3\right\} =$

$$= \pi\left[\delta\left(\omega-\frac{\pi}{4}\right)+\delta\left(\omega+\frac{\pi}{4}\right)\right]-2\pi j\left[\delta\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)-\delta\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)\right]+6\pi\delta(\omega)$$



2) • $T_s = 4s \Longleftrightarrow \frac{1}{f_s} = 4 \Longleftrightarrow f_s = \frac{1}{4}\,Hz$

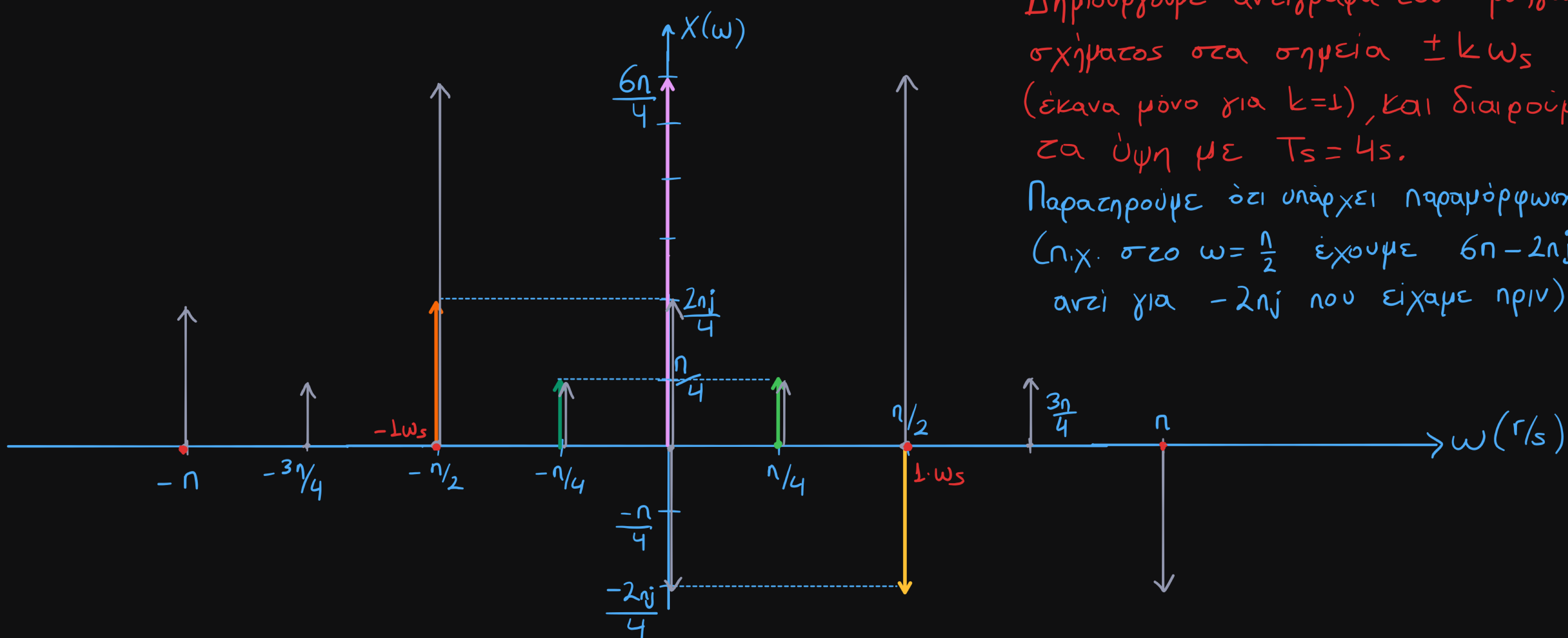
• Έχουμε $\omega_m = \frac{\pi}{2}\ r/s$ και $f_m = \frac{\omega_m}{2\pi} = \frac{1}{4}\,Hz$

• Επειδή $f_s < 2f_m$ $\left(\frac{1}{4} < \frac{1}{2}\right)$, τότε δεν ικανοποιείται η συνθήκη του Nyquist και θα έχουμε παραμόρφωση.

• $\omega_s = 2\pi f_s = 2\pi\cdot\frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}\ r/s$

Δημιουργούμε αντίγραφα του προηγούμενου σχήματος στα σημεία $\pm k\omega_s$, $k=1,2,\ldots$ (έκανα μόνο για $k=1$), και διαιρούμε τα ύψη με $T_s = 4s$.

Παρατηρούμε ότι υπάρχει παραμόρφωση (π.χ. στο $\omega=\frac{\pi}{2}$ έχουμε $6\pi-2\pi j$ αντί για $-2\pi j$ που είχαμε πριν)



Σημείωση: Τα παραπάνω φάσματα δεν θεωρούνται 100% σωστά γιατί μπλέκουμε πραγματικούς με φανταστικούς αριθμούς. Το σωστό θα ήταν να κάνουμε 2 ξεχωριστά φάσματα, ένα για το πλάτος και ένα για την φάση.

3). Το σήμα $y(t)$ είναι χρονοπερατό ($t_{min} = -\frac{1}{2}$ και $t_{max} = \frac{1}{2}$) $\longrightarrow$ δεν γίνεται να είναι ζωνοπερατό.

Άρα δεν γίνεται να υπολογίσουμε τη συχνότητα Nyquist. ($f_s \to +\infty$ και $T_s \to 0$)

• Επειδή $\cos(\omega_c t) \xrightarrow{FT} \pi[\delta(\omega-\omega_c)+\delta(\omega+\omega_c)] \overset{έστω}{=\!=} A_1(\omega)$

και $\sin(\omega_c t) \xrightarrow{FT} -\pi j[\delta(\omega-\omega_c)-\delta(\omega+\omega_c)] \overset{έστω}{=\!=} A_2(\omega)$

και λόγω της ιδιότητας $x_I(t)\cdot a_1(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_I(\omega) * A_1(\omega)$

και της ιδιότητας $x(t)*\delta(t-t_0) = x(t-t_0)$

Θα έχουμε $Z_I(\omega) = \frac{1}{2}\left[X_I(\omega-\omega_c)+X_I(\omega+\omega_c)\right]$

και $Z_Q(\omega) = -\frac{1}{2} j\left[X_Q(\omega-\omega_c) - X_Q(\omega+\omega_c)\right]$

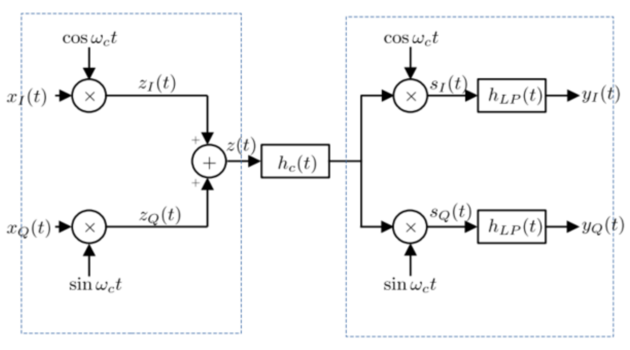
• Γραμμικότητα: $z_I(t)+z_Q(t) \xrightarrow{FT} Z_I(\omega)+Z_Q(\omega)=Z(\omega)$

Θέμα 5

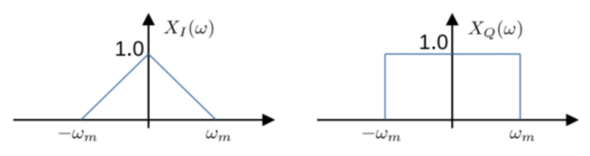
Το παρακάτω διάγραμμα, Σχήμα 1-(α), απεικονίζει ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα όπου ο πομπός, το κανάλι και ο δέκτης αναπαριστώνται ως συστήματα συνδεδεμένα σε σειρά. Στο διάγραμμα αυτό τα χαμηλοπερατά φίλτρα (με την ένδειξη LP) έχουν συχνότητα αποκοπής ίση με ω_m, ενώ το κανάλι έχει κρουστική απόκριση ίση με $h_c(t) = \delta(t)$.

Αν στην είσοδο του πομπού τα σήματα πληροφορίας $x_I(t)$ και $x_Q(t)$ έχουν το φάσμα που απεικονίζεται στο σχήμα 1-(β) και θεωρώντας ότι $\omega_m << \omega_c$, να βρεθούν και να σχεδιαστούν:

1. Τα φάσματα $Z_I(\omega)$, $Z_Q(\omega)$ και $Z(\omega)$ συναρτήσει των $X_I(\omega)$ και $X_Q(\omega)$.
2. Τα φάσματα $S_I(\omega)$, $S_Q(\omega)$ συναρτήσει των $X_I(\omega)$ και $X_Q(\omega)$.
3. Τα φάσματα $Y_I(\omega)$, $Y_Q(\omega)$ και $Z(\omega)$ συναρτήσει των $X_I(\omega)$ και $X_Q(\omega)$.

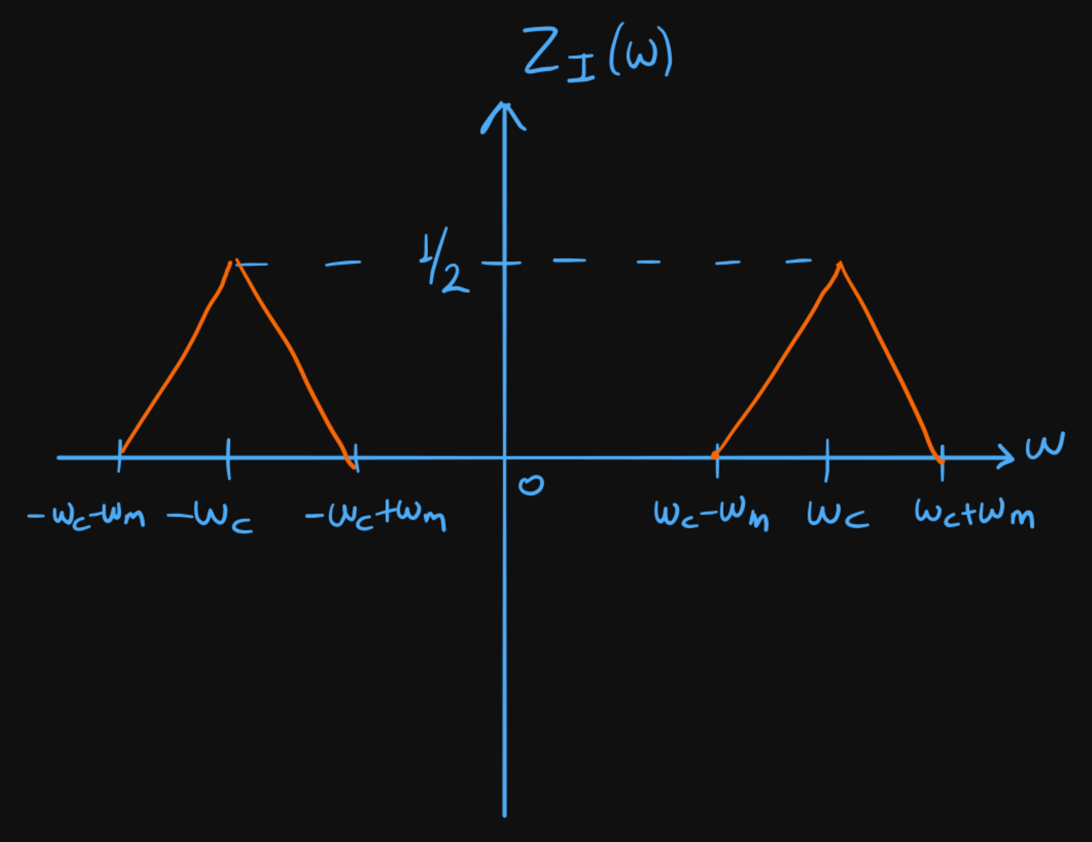


(α)

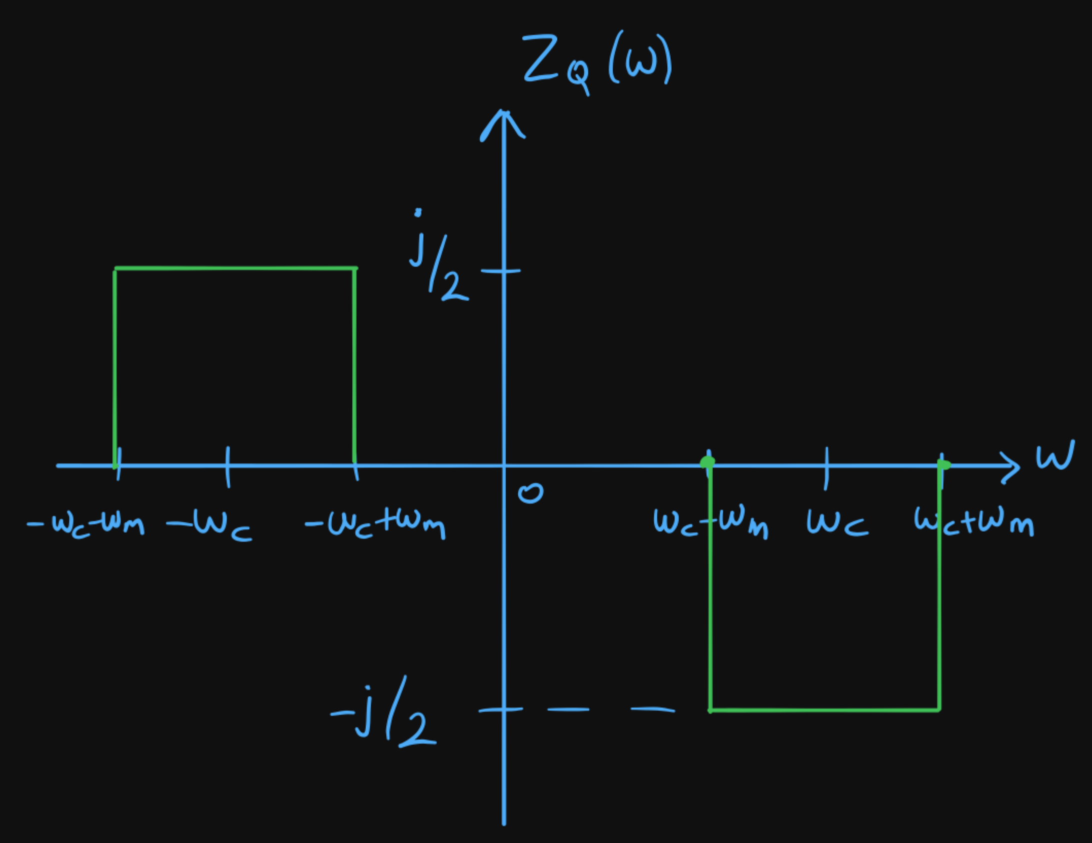


(β)

Σχήμα 1:



+



$= Z(\omega)$

↓

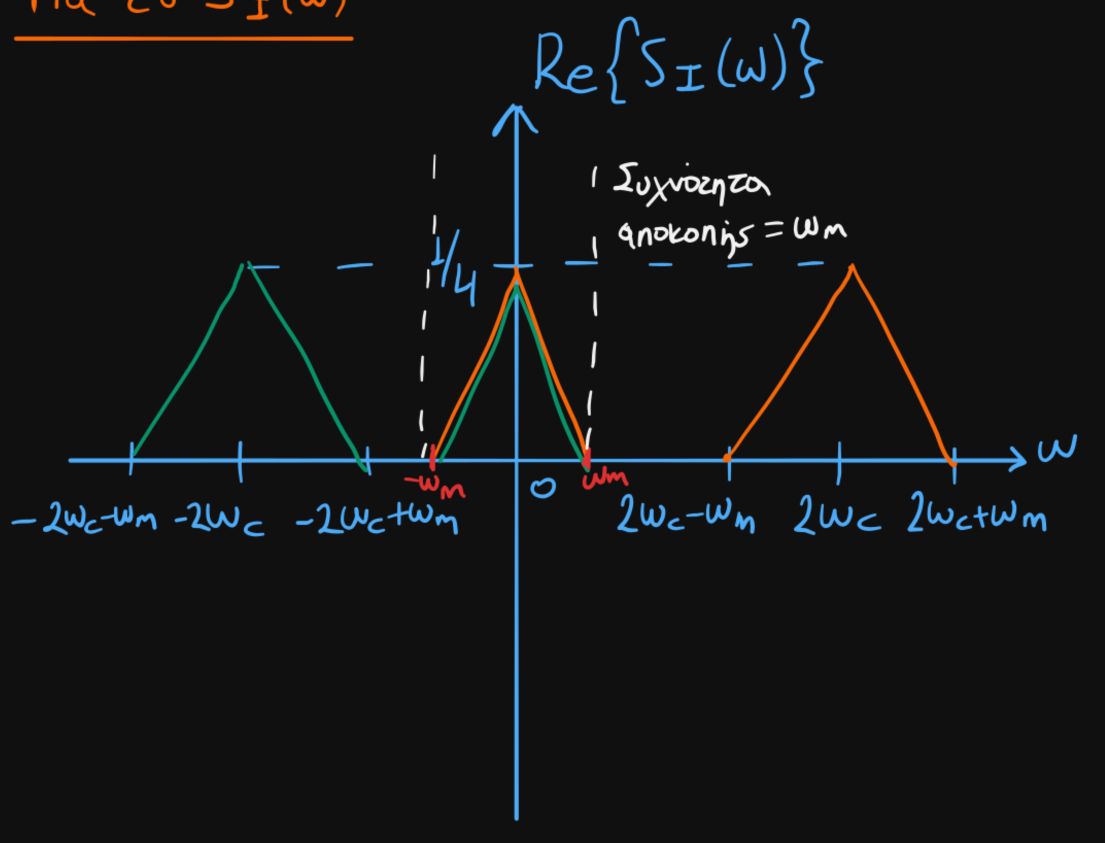
τα ίδια 2 σχήματα (το Z_I έχει πραγματικό κατακόρυφο άξονα ενώ το Z_Q έχει μιγαδικό.)

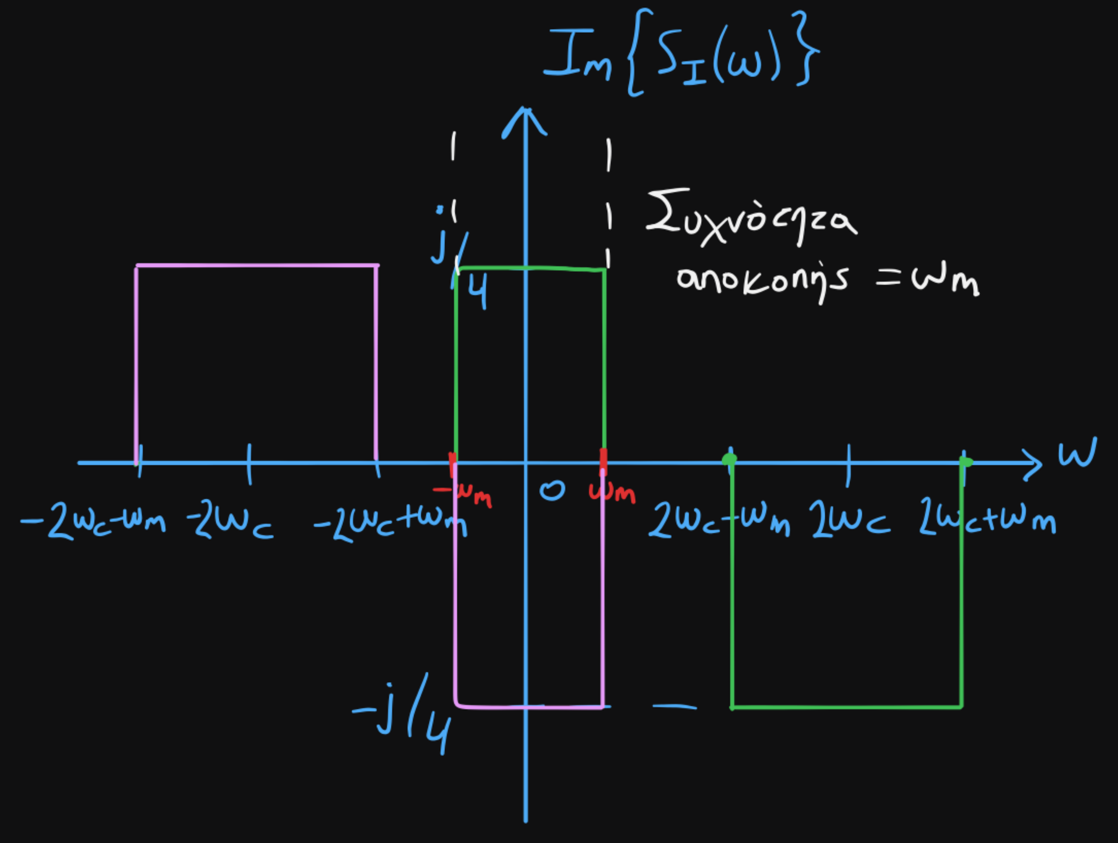
• Το $h_c(t)=\delta(t)$ δεν επηρεάζει το φάσμα του $Z(\omega)$ αφού $\delta(t)\xrightarrow{FT} 1$

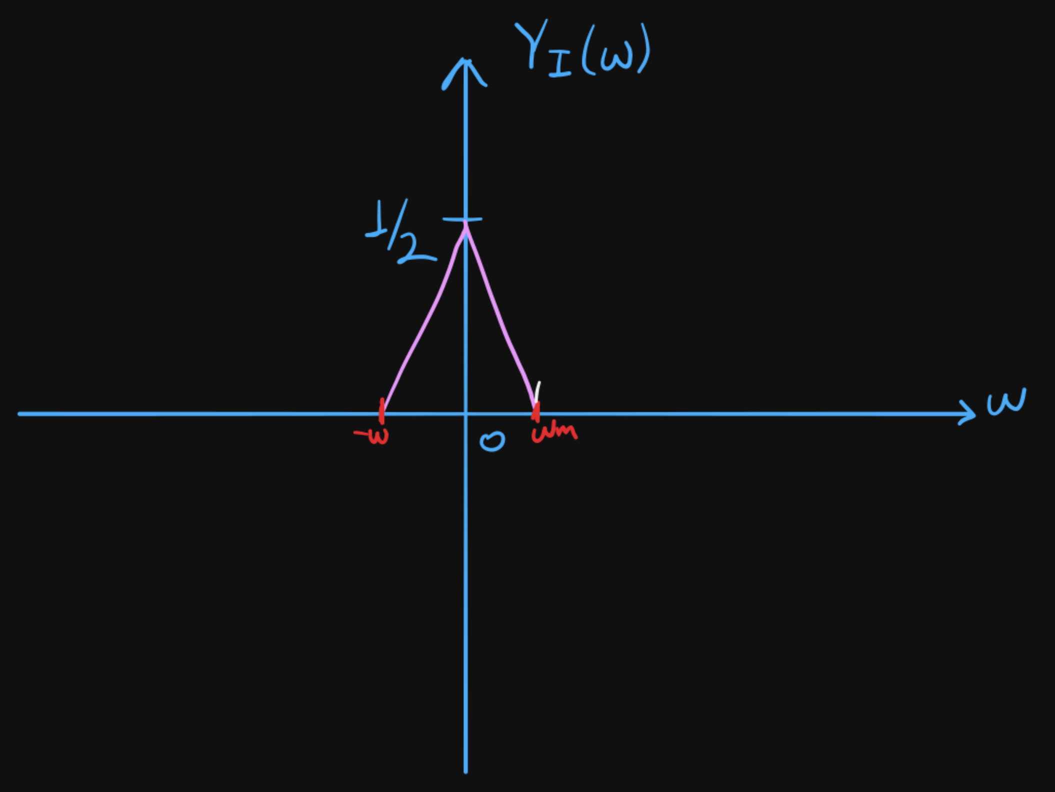
και $z(t)*h_c(t) \longleftrightarrow Z(\omega)H_c(\omega) = Z(\omega)\cdot 1 = Z(\omega)$

• Ομοίως με πριν $S_I(\omega)=\frac{1}{2}\left[Z(\omega-\omega_c)+Z(\omega+\omega_c)\right]$ και $S_Q(I) = -\frac{1}{2} j\left[Z(\omega-\omega_c)-Z(\omega+\omega_c)\right]$

Για το $S_I(\omega)$

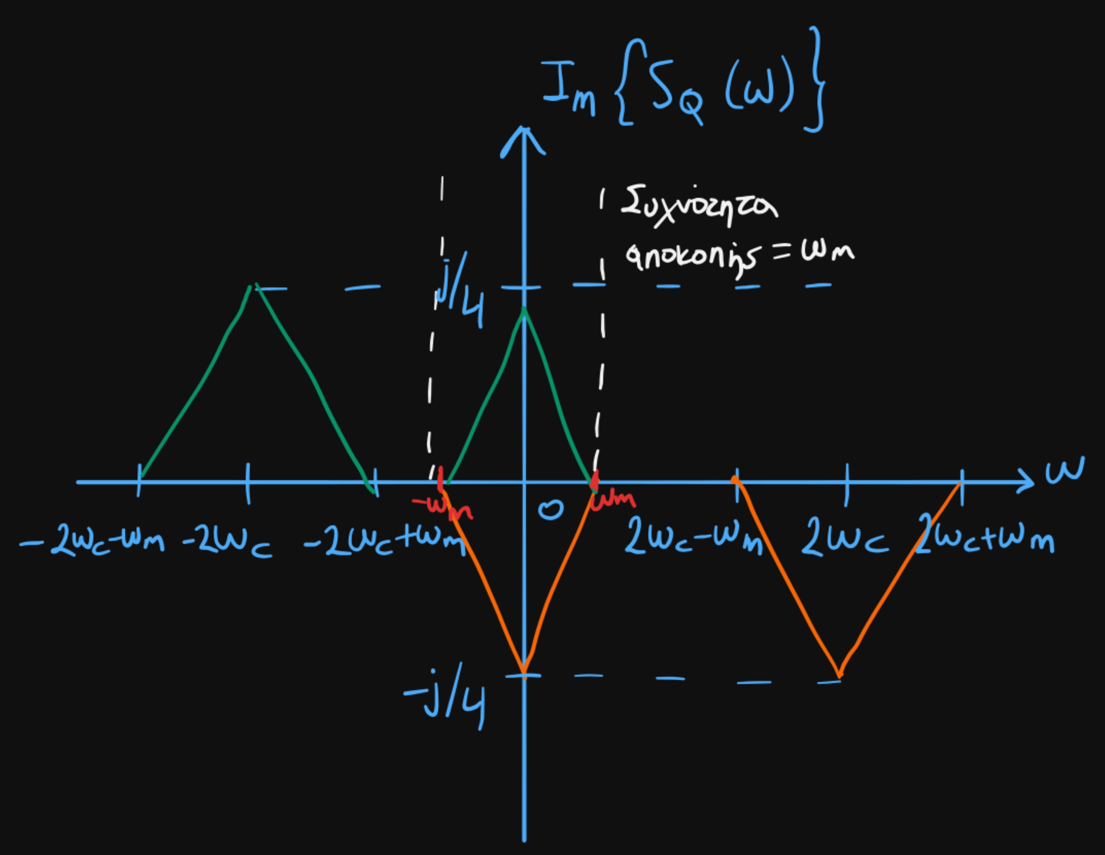


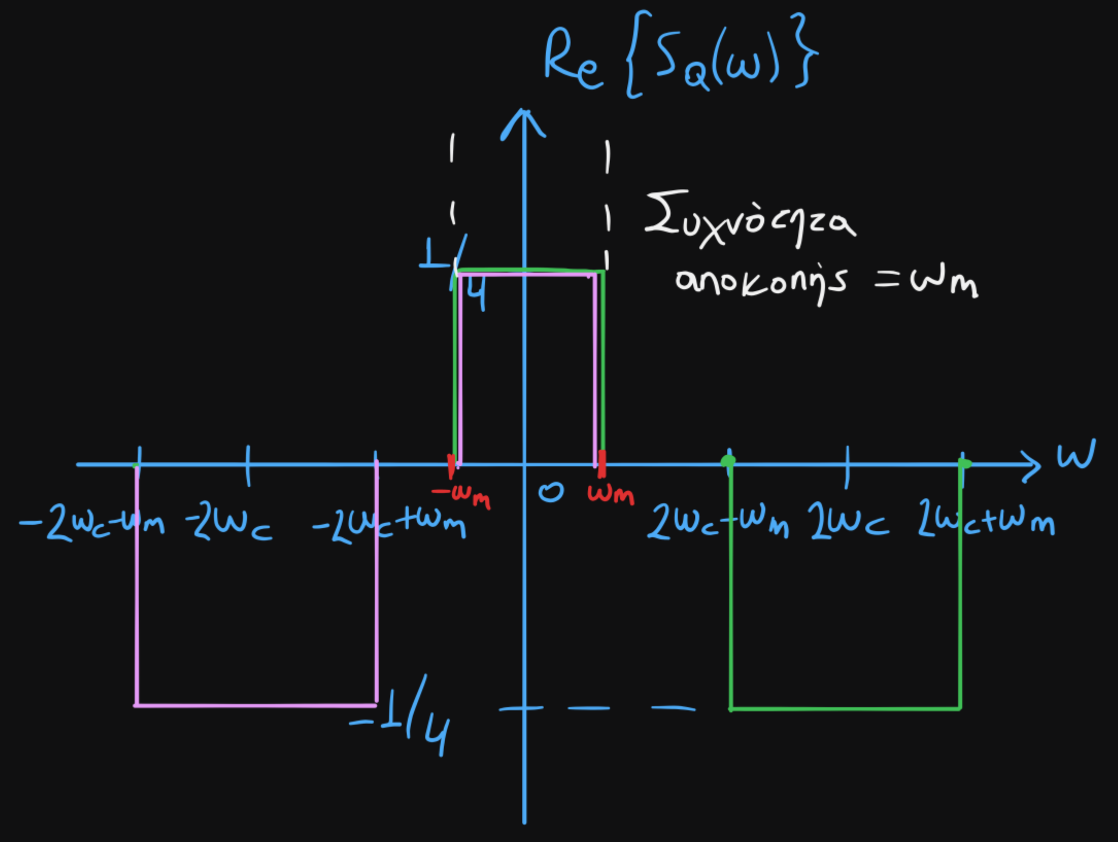


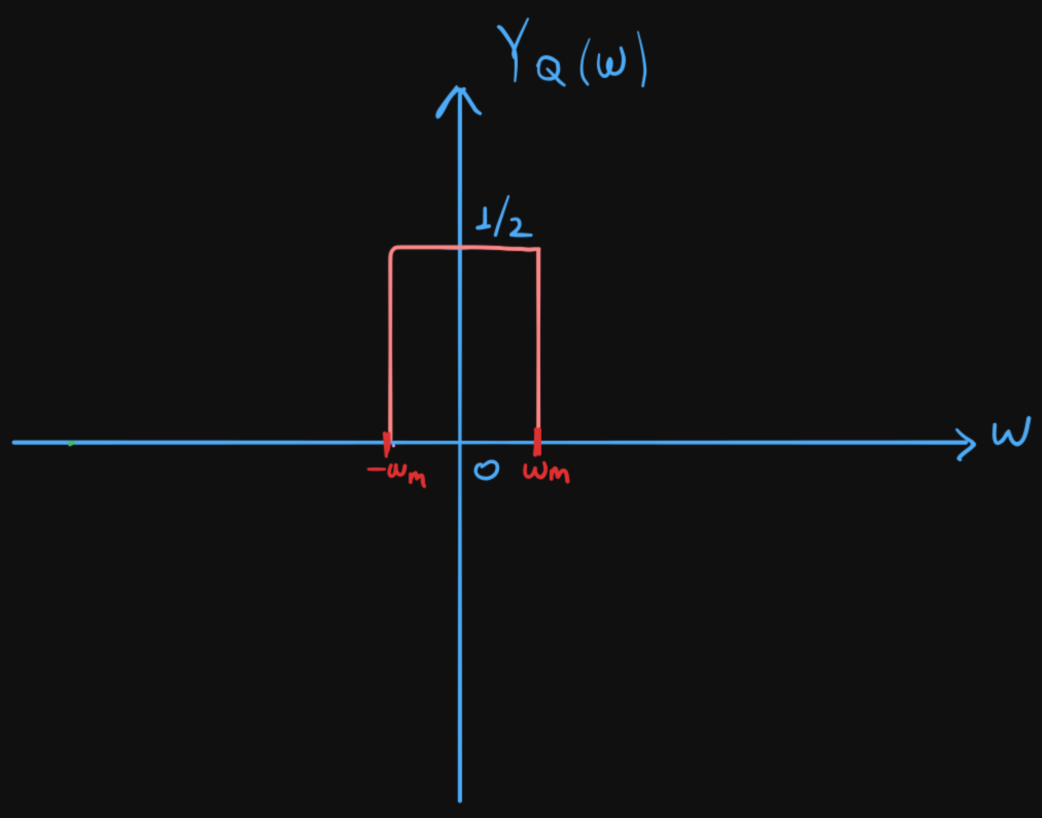


Δεν έχουμε φάσμα στον φανταστικό άξονα (για το $Y_I(\omega)$)

Για το $S_Q(\omega)$







Δεν έχουμε φάσμα στον φανταστικό άξονα (για το $Y_Q(\omega)$)

Α' τρόπος (όχι για τις εξετάσεις)

Ιανουαρίου 21

Θέμα 1 (4)
Έστω το σήμα $x(t) = \cos(\frac{\pi}{4}t) + 2\cos(\frac{\pi}{2}t) + 3$.

- Καθορίστε τη σειρά Fourier και τη θεμελιώδη γωνιακή συχνότητα του σήματος.

(τα υπόλοιπα ερωτήματα τα λύσαμε πριν)

- $x(t) = \cos(\underbrace{\tfrac{\pi}{4}}_{\omega_1}t) + 2\cos(\underbrace{\tfrac{\pi}{2}}_{\omega_2}t) + 3$

- $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8s.$

- $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4s.$

- $T_1 = 2T_2 \rightarrow$ Θεμελιώδης περίοδος του $x(t)$: $\underline{T_0 = 8s.}$ $\left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow$ θεμελιώδης γωνιακή συχνότητα

- $$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt = \frac{1}{8}\int_{-4}^{4}\left(\cos(\tfrac{\pi}{4}t) + 2\cos(\tfrac{\pi}{2}t) + 3\right)dt = \frac{1}{8}\left(\frac{4}{\pi}\Big[\cancelto{0}{\sin(\tfrac{\pi}{4}t)}\Big]_{-4}^{4} + 2\cdot\frac{2}{\pi}\Big[\cancelto{0}{\sin(\tfrac{\pi}{2}t)}\Big]_{-4}^{4} + 3\big[t\big]_{-4}^{4}\right) \Leftrightarrow \underline{a_0 = 3}$$

- $$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4}\Big[\cos(\tfrac{\pi}{4}t)\cos(n\tfrac{\pi}{4}t) + 2\cos(\tfrac{\pi}{2}t)\cos(n\tfrac{\pi}{4}t) + \underbrace{3\cos(n\tfrac{\pi}{4}t)}_{=0 \text{ για κάθε } n>0}\Big]dt$$

$$\frac{1}{2}\left[\cos(\tfrac{\pi}{4}t + n\tfrac{\pi}{4}t) + \cos(\tfrac{\pi}{4}t - n\tfrac{\pi}{4}t)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos(\tfrac{\pi}{4}t(1+n)) + \cos(\tfrac{\pi}{4}t(1-n))\right]$$

δηλαδή $\int_{-4}^{4}\cos(\tfrac{\pi}{4}t)\cos(n\tfrac{\pi}{4}t)\,dt =$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\frac{\pi}{4}(1+n)}\cancelto{0}{\sin(\tfrac{\pi}{4}t(1+n))}\right]_{-4}^{4} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\underbrace{\frac{\pi}{4}(1-n)}_{n\neq 1}}\cancelto{0}{\sin(\tfrac{\pi}{4}t(1-n))}\right]_{-4}^{4} \underline{= 0}$$

$$\frac{1}{2}\left[\cos(\tfrac{\pi}{2}t + n\tfrac{\pi}{4}t) + \cos(\tfrac{\pi}{2}t - n\tfrac{\pi}{4}t)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos(\tfrac{\pi}{4}t(n+2)) + \cos(\tfrac{\pi}{4}t(2-n))\right]$$

δηλαδή $\int_{-4}^{4}\cos(\tfrac{\pi}{2}t)\cdot\cos(n\tfrac{\pi}{4}t)\,dt =$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\frac{\pi}{4}n+2}\cancelto{0}{\sin(\tfrac{\pi}{4}t(n+2))}\right]_{-4}^{4} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\underbrace{\frac{\pi}{4}(2-n)}_{n\neq 2}}\cancelto{0}{\sin(\tfrac{\pi}{4}t(2-n))}\right]_{-4}^{4} \underline{= 0}$$

- $\underline{\text{Για } n=1:}$ $\int_{-4}^{4}\cos^2(\tfrac{\pi}{4}t)\,dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\cancelto{0}{\sin(\frac{\pi}{4}t)}}{\frac{\pi}{4}}\right]_{-4}^{4} = 4$

- $\underline{\text{Για } n=2:}$ $\int_{-4}^{4}\cos^2(\tfrac{\pi}{2}t)\,dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\cancelto{0}{\sin(\frac{\pi}{2}t)}}{\frac{\pi}{2}}\right]_{-4}^{4} = 4$

Οπότε:

$\nearrow a_1 = \frac{1}{4}\cdot 4 = 1$

$\searrow a_2 = \frac{1}{4}\cdot 2\cdot 4 = 2$

- $\underline{b_n = 0}$ διότι $x(-t) = x(t)$ (x άρτια)

Άρα $x(t) = a_0 + a_1\cos(\omega_0 t) + a_2\cos(2\omega_0 t) \Leftrightarrow \boxed{x(t) = 3 + \cos(\tfrac{\pi}{4}t) + 2\cos(\tfrac{\pi}{2}t)}$

(ολόιδια η $x(t)$)

Β' τρόπος

- $x(t) = \cos(\tfrac{\pi}{4}t) + 2\cos(\tfrac{\pi}{2}t) + 3 = \underbrace{1}_{a_1}\cos(\underbrace{1}_{n=1}\cdot\overbrace{\tfrac{\pi}{4}}^{\omega_0}t) + \underbrace{2}_{a_2}\cos(\underbrace{2}_{n=2}\cdot\overbrace{\tfrac{\pi}{4}}^{\omega_0}t) + \underbrace{3}_{a_0}$

(Θεμελιώδης γωνιακή συχνότητα: $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$ rad/s)

Άρα έχουμε ήδη τριγωνομετρική σειρά fourier με $\underline{a_0 = 3}$, $\underline{a_1 = 1}$, $\underline{a_2 = 2}$

και $a_n = 0$ για $n > 2$, $n \in \mathbb{N}^*$

και $b_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ($x(t)$ άρτια)

Λύσεις Φεβρουαρίου 2021

Θέμα 2 (2)
Έστω περιοδικό σήμα $x(t)$ με θεμελιώδη περίοδο T_{0x}. Αν $y(t) = x(t + T_{0x}/2)$ να αποδειχθεί ότι η θεμελιώδης περίοδός του, T_{0y}, ισούται με T_{0x}. Εξετάστε αν το σήμα $z(t) = x(t) + y(t)$ είναι περιοδικό και αν η θεμελιώδης περίοδός του, T_{0z}, είναι ίση με T_{0x}.

- $x(t)$ περιοδικό: $x(t) = x(t+T_{0x})$ (1)
- $y(t)$ είναι περιοδικό αν.ν.

$$y(t+T_{0y}) = y(t) \Leftrightarrow x\left(t+\frac{T_{0x}}{2}+T_{0y}\right) = x\left(t+\frac{T_{0x}}{2}\right) \xLeftrightarrow{\text{Θέτω } t+\frac{T_{0x}}{2}=u} x(u+T_{0y}) = x(u) \underset{(1)}{\xLeftrightarrow{\text{Λόγω της}}} T_{0y} = T_{0x}$$

- $$z(t+T_{0x}) = x(t+T_{0x}) + y(t+T_{0x}) = x(t) + y(t) \Leftrightarrow z(t+T_{0x}) = z(t)$$

z περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο T_{0x}

Θέμα 3 (2)
Έστω το σήμα
$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}u(t-1).$$
Να βρεθεί η ενέργεια και η ισχύς του. Να εξετάσετε αν το $x(t)$ είναι σήμα ενέργειας ή ισχύος.

- Ενέργεια $E = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow E = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t} u^2(t-1)\,dt = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$$

$$\Leftrightarrow E = \lim_{k\to+\infty}\left([\ln t]_1^k \right) = \lim_{k\to+\infty}(\ln k - \ln 1) = +\infty$$ (δεν είναι σήμα ενέργειας) $\rightarrow$ Πρέπει $0 < E < +\infty$

- Ισχύς $P = \lim_{T\to+\infty}\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)\,dt\right] = \lim_{T\to+\infty}\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{1}{t}u^2(t-1)\,dt\right] = \lim_{T\to+\infty}\left[\frac{1}{2T}\int_{1}^{T}\frac{1}{t}\,dt\right] = \lim_{T\to+\infty}\left[\frac{1}{2T}\cdot\ln T\right]$

$$\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{T\to+\infty}\frac{\frac{1}{T}}{2} = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T} = 0$$ (δεν είναι σήμα ισχύος) $\rightarrow$ Πρέπει $0 < P < +\infty$

Δεν ξέρω χρονιά

Θέμα 3 (2)
Ένα γραμμικό και αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση σύστημα περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$0.5y[n] + y[n+1] = x[n+1] - 0.5x[n], \quad n \geq -1.$$

Να βρεθεί η κρουστική απόκριση του συστήματος. Ποια θα είναι η έξοδος στη μόνιμη κατάσταση, $y[n]$, αν η είσοδος είναι $x[n] = \cos(n\pi/3)u[n]$ και οι αρχικές συνθήκες μηδενικές;

• Θέτουμε $\underline{n+1=k}$ και έχουμε

$$0{,}5y[k-1]+y[k]=x[k]-0{,}5x[k-1], \quad \underbrace{k\geq 0}_{\text{αιτιατό}}$$

οπότε ο Μ/Σ Ζ είναι

$$0{,}5Y(z)\cdot z^{-1}+Y(z)=X(z)-0{,}5X(z)z^{-1} \Leftrightarrow Y(z)\left(\frac{0{,}5}{z}+1\right)=X(z)\left(1-\frac{0{,}5}{z}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y(z)}{X(z)}=H(z)=\frac{1-\frac{0{,}5}{z}}{\frac{0{,}5}{z}+1}=\frac{z-0{,}5}{0{,}5+z} \Leftrightarrow H(z)=\frac{z}{z+0{,}5}-0{,}5z^{-1}\frac{z}{z+0{,}5}$$

Άρα $\boxed{h(n)=(-0{,}5)^n u(n)-0{,}5(-0{,}5)^{n-1}u(n-1)}$

• Έχουμε ημιτονοειδή είσοδο $x(n)=\cos(n\overbrace{\tfrac{\pi}{3}}^{\omega_0})u(n)$, οπότε η έξοδος είναι ίση με

$$y(n)=\underbrace{A}_{\text{πλάτος}=1}|H(e^{j\omega_0})|\cos(\omega_0 n+\underbrace{\varphi}_{\text{αρχική φάση}=0}+\theta)=|H(e^{j\omega_0})|\cos(\omega_0 n+\theta)$$

• $$H(e^{j\omega_0})=\frac{e^{j\omega_0}-0{,}5}{e^{j\omega_0}+0{,}5}=\frac{e^{j\frac{\pi}{3}}-0{,}5}{e^{j\frac{\pi}{3}}+0{,}5}=\frac{\cos(\frac{\pi}{3})+j\sin(\frac{\pi}{3})-0{,}5}{\cos(\frac{\pi}{3})+j\sin(\frac{\pi}{3})+0{,}5}=\frac{\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}-0{,}5}{\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}+0{,}5}$$

$$\Leftrightarrow H(e^{j\omega_0})=\frac{j\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+j\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{j\sqrt{3}}{2+j\sqrt{3}}=\ldots=\frac{3}{7}+\frac{2\sqrt{3}}{7}j$$

Οπότε $$|H(e^{j\omega_0})|=\sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{7}\right)^2}=\ldots=\frac{\sqrt{21}}{7}$$

• και $$\theta=\angle H(e^{j\omega_0})=\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=49{,}10^\circ$$

Άρα $\boxed{y(n)=\frac{\sqrt{21}}{7}\cos\left(\frac{\pi}{3}n+49{,}10^\circ\right)}$